

A TREATISE

ON THE

INTEGRAL CALCULUS AND ITS APPLICATIONS,

WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

JOHN HUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU

BY

MUNSHI MAHAMMED ZAKA-UL-LAH,

Head Master, Normal School, Delhi,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE
SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYPUR AND SUBA
BEHAR.

رسالہ علم حساب الکلیات

اور اُس کے استعمالات مع بہت سی مثالوں کے

مولفہ

ٹاؤنہنٹر صاحب ایم ای ایف آر ایس

جسکو

منشی محمد ذکرا اللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دہلی نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسائٹی علیگنڈا و سین ٹیفک سوسائٹی صوبہ بہار

اُس میں ترجمہ کیا

اور

بدقام دہلی مطبع مرتضوی میں باہتمام حاجی

محمد عزیز الدین کے مطبوع ہوا

سنہ ۱۸۷۶ ع

رسالہ علم حساب الکلیات اور اسکے اشتغالات معہ بہت سی مثالوں کے

مؤلف

..... ڈاکٹر صاحب ایم ای ایف آریس

جکو

منشی محمد ذکاء الدین صاحب ہیڈ ماسٹر نارل اسکول دہلی نے

تباہ مقاصد

سین ٹیفک سویٹھی علی گڑھ و سین ٹیفک سویٹھی صوبہ بہار

اردو میں ترجمہ کیا

اور

بہار دہلی مطبع مرتضوی میں باہتمام حاجی

محمد عزیز الدین کے مطبوع ہوا

۱۸۷۲ء

علم حساب الکلیات

باب اول

کلی لینے کے معنی اور مشالیں

(۱) علم حساب الجبریات میں تو مجملہ قواعد کا وہ بیان کیا گیا ہے کہ جسکی استعانت سے ایک جملہ سی دوسرا جملہ وہ استخراج ہوتا ہے جسکا نام سبزوئی پہلے جملہ کا ہی علم حساب الکلیات میں اسکا نام ہے یعنی ہم سبزوئی سی وہ جملہ اند کرتے ہیں جسے سبزوئی استنباط ہوا تھا لیکن سبزوئی سے اس بلکہ استنباط کرنا جو باخذ سبزوئی کا تھا علم حساب الکلیات کا موضوع نہیں ہے بلکہ موضوع اسکا یہ ہے کہ چھوٹی چھوٹی ارقام کے سلسلہ غیرتناہی کو جمع کریں اور یہ چھوٹی چھوٹی رقمیں حدود معین نہ کہیں اور ایسی سلسلہ کے جمع کریں جنہیں ہرگز اکثر نہ دیت اسلام کی پڑتی ہے کہ وہ جملہ دریافت کریں جو باخذ سبزوئی معلوم کا ہو اب ہم اسکو ثابت کرتے ہیں

(۲) فرض کرو کہ حج (ل) جملہ لکھا گیا ہے کہ وہ ہمیشہ آتنا ہی رہتا ہے اور دو معین قیمتوں ط اور ص کے درمیان جو لک کے تمام قیمتیں واقع ہوں اونکی درمیان پوشتہ رہتا ہے اور لہم و لہم ۰۰۰ لہن - ایک سلسلہ قیمتوں کا ط اور ص کے درمیان ایسا ہے کہ

ط ۰ لہم و لہم ۰۰۰ لہن - و ص بین الجا ط مقدار کے ترتیب تصاعیدی یا ترتیب تنازلی ہے پس اب دعویٰ یہ ہے کہ سلسلہ

$$(\text{لہم} - \text{ط}) \text{مجم} (\text{ط}) + (\text{لہم} - \text{لہم}) \text{مجم} (\text{لہم}) + (\text{لہم} - \text{لہم}) \text{مجم} (\text{لہم}) + \dots + (\text{لہم} - \text{لہم}) \text{مجم} (\text{لہم}) + (\text{ص} - \text{لہن}) \text{مجم} (\text{لہن} - ۱) + (\text{لہن} - ۱) \text{مجم} (\text{لہن} - ۱)$$

کی حد خالی جب دریافت کریں کہ لہم - ط اور اور لہم - لہم ۰۰۰ ص - لہن - ۱

غیر متناہی کم ہون اور اس غیر متناہی کم ہونی کا نتیجہ یہ ہو گا کہ ان غیر متناہی زیادہ ہو
 لا - ط = ہم اور لا - لہ = لاہ = م ۰۰۰ ص - لن = ا = ہن مقرر کرنا

پس اب سلسلہ اس صورت میں لکھا جاسکتا ہے کہ

ہم مچ (ط) + ہم مچ (لا) + ۰۰۰ + ہن مچ (ا) + لن مچ (۱) + ہن مچ (۱) + ۰۰۰

اور اسکو حج (لا) سے تعبیر کر سکتے ہیں کیونکہ یہ یہ حال میں ان رقموں کا بہت جتنا سفر حج (لا) سے
 معلوم ہی ہو گا کہ ان رقموں میں سے جو کا منظم ہے ہر ایک رقم کو یہ خیال کر سکتے ہیں کہ بغیر لا کی ضرورت
 قیمتوں کا تفاوت ہی اسطرحے رزمج (لا) لا کو معلوم اور رقموں کا ٹہرا سکتے ہیں جنکو جمع کرنا
 اور حج مچ (لا) لا کو حاصل جمع اونکا کہہ سکتے ہیں

اب ہم ثابت کرتے ہیں کہ حج مچ (لا) لا ایک خاصہ متناہی مقدار کی حد ہی پر نہیں جاسکتا
 اسواسطے کہ فرض کرو لا اوس بڑی سی بڑی عددی قیمت کو حج (لا) کی تعبیر کرتا ہی جو لا کی
 ط اور ص کے درمیان واقع ہونے سے پیدا ہو تو حج مچ (لا) لا تعدا اچھوٹا
 (ہم + م + ۰۰ + ہن) اسے یعنی (ص - ط) اسے ہی

اب ہم حد غائی حج مچ (لا) لا کی تشخیص کرتے ہیں فرض کرو کہ حج (لا) ایسا جملہ لا کا ہے
 کہ جسکا سرخزوی حج (لا) بلحاظ لا کے ہی تو ہر کو یہ معلوم ہے کہ حد غائی

ہج (لا + ہم) - ہج (لا) جب ہم غیر متناہی کم ہو حج (لا) ہی اسے معلوم ہوا کہ

ہج (لا) - ہج (ط) = ہا [مچ (ط) - ق ا]

ہج (لا) - ہج (لب) = ہم [مچ (لا) + ق ب]

ہج (لا - ا) - ہج (لا - م) = ہن [مچ (لا - م) + ق ن - ا]

ہج (ص) - ہج (لا - ا) = ہن [مچ (لا - ا) + ق ن]

اسی ق و ق ۰۰۰ ق ن اخر کار معدوم ہو جائیگا اس واسطوں کے جمع کرنے سے یہ حاصل ہو تا ہے
 ہج (ص) - ہج (ط) = حج مچ (لا) لا + حج ص ق

کلی لیتے

۱۰۰

ابھی تک چھپنا بہ نسبت (ص - ط) ق کے ہے اس میں ق سے پہلے بڑی مقدار کو مفادیر
 ق و ق م ۰۰۰ ق ن میں کے تعبیر کرتا ہے اسے معلوم ہوا کہ حج ہ ق اخر کار معدوم ہوتا ہے اور
 اسے نتیجہ نکلتا ہے کہ جب اوں مفادیر میں سے کہ جتنا معلوم لا ہی ہر یک مقدار غیر محدود کم ہوتی ہے
 تو حج (لا) لا کی حد غائی حج (ص) - حج (ط) ہے
 (۳) نتیجہ مذکور کی کتاب کا طریقہ یہ ہے کہ

ط مٹج مٹج (لد) زلد = مٹج (ص) - مٹج (ط)
مٹج مع اختصار لفظ حاصل جمع کا ہے اور ج مٹج (لد) لا زلاد و لا بے او سکولہ لیر
(۴۱) فرض کرو کہ ہمدھم . ص سب یسین برابر ہیں تو ہر یک نصف اونیس سے برابر
ص - ط کے ہوگی اور لار برابر با + ج (ص - ط) ہے اسے معلوم ہوا کہ ط مٹج مٹج (لد) کے
معنی یہ ہیں کہ ص - ہا کو ن برابر حصوں میں تقسیم کرو جن میں سے ہر ایک برابر ہو اور ج (لد) میں
لد کی جگہ متواتر ط و ط + ہمدھم + ط + ہمدھم + ط + ہمدھم (ن - ۱) ہمدھم رکھو اور ان قیمتوں کو جمع کر دو
اور حاصل جمع کو ہمدھم ضرب دو اور پھر ہمدھم کو غیر متناہی کم کر دو

اگر یہ اعمال کیے جائیں تو یہ نتیجہ صحیح (ص) - صحیح (ط) حاصل ہوگا اسمین صحیح (لا) وہ ملک
جس کا سب جزوی لمجا ط لا کے مع (لا) ہے
اب طالب علم بہت غور اور توجہ اور احتیاط سے دیکھے کہ علم باب کلیات ایک خاص مسئلہ پر اور انکی
طریقہ کتابت پر مبنی ہی مسئلہ تو یہ ہے کہ فرض کرو صحیح (لا) ایک جملہ لکھا ہی اور اسکا سرخزئی لمجا
لا کے مع (لا) ہے اور ان مثبت صحیح ہے اور نہ = ص - ط اور مع (لا) محدود اور پوسیتہ لا کے
اون تمام قسمیوں کے درمیان فرض کیا گیا ہے جو ط اور ص کے درمیان واقع ہوں توجہ بن غیر محدود
زیادہ ہو تو حد غائی

$$[\text{مَج (ط)} + \text{مَج (ط + هـ)} + \text{مَج (ط + هـ + و)} + \dots + \text{مَج (ط + هـ + و + ز)}]$$
 کی مَج (ص) - مَج (ط) ہے

کلی لینے کے

۵

مستحق

اب طریقہ کتاب یہ ہے کہ اس حد غائی کو طبع مع (لا) زلا سے تعبیر کرتے ہیں اور

طبع مع (لا) زلا = صج (ص) - صج (ط)

ایک خاص صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ ط صفر ہو تو ن ص = ص اور ن جب غیر محدود زیادہ ہو تو حد غائی

صج (۱۰) + صج (ص) + صج (۲ ص) + ... + صج (ص - ص) [

کی صج مع (لا) زلا ہی اور برابر صج (ص) - صج (۰) کے ہے

(۵) ایک اکیلی رقم مثلاً صج (لا) لکھو اکثر خیر ترکیبی کہتے ہیں اب اس بات پر توجہ کرنی چاہیے

کہ حد غائی ج صج (لا) لکھو کی قیمت میں تبدل نہیں واقع ہوگا اگر ہم اجزاء ترکیبی محدود تعداد

کے حساب میں لگائیں یا اجزاء ترکیبی متماثلہ محدود تعداد کی زیادہ کر دیں اس واسطے کہ حد غائی

میں ہر ایک خیر ترکیبی غیر محدود چھوٹا ہوتا ہی اور غیر محدود چھوٹی مقدار تک کی تعداد محدود ہوا

معلوم ہو جاتی ہیں

(۶) اوپر کی عمل کو کلی لینا یا کلی نکالنا کہتے ہیں اور مقدار طبع مع لکھو کلی معر فیہ محدود اور طبع

حدود غائی کلی کی کہتے ہیں چونکہ قیمت اس کلی محدود کی صج (ص) - صج (ط) ہے

اسلئے جملہ صج (لا) کی جب حدود غائی معینہ کے درمیان کلی لین تو ہم اول جملہ صج (لا) کو

دریافت کریں جسکا صج (لا) سب جزوی ہو اور صج (لا) اور صج (لا) کے درمیان جو ربط ہے

وہ اس طرح تعبیر ہوتا ہے کہ

صج (لا) = $\frac{\text{ز صج (لا)}}{\text{ز صج (لا)}}$

اور اسکو اس مساوات سے بھی تعبیر کرتے ہیں کہ

مع صج (لا) زلا = صج (لا)

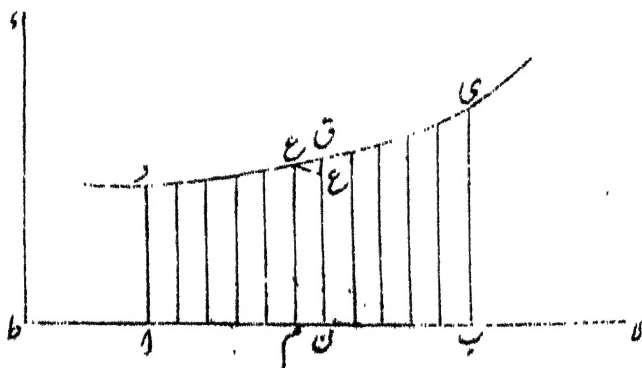
کلی

ایسی مساوات میں جیسے کہ یہ اخراجات ہی جب حدود غائی معین نہ ہوں تو فقط یہ ہے

صج (لا) وہ جملہ ہے جسکا سب جزوی لینے سے صج (لا) پیدا ہوتا ہی اور صج (لا) کو

کلی کو غیر معروف یا غیر معلوم کی کہتے ہیں

(۷) علم حساب الکلیات کی ایجاد اور تدوین کے باب بہت سی سال پہلے منہ بولے یہ بھی ان کی ایک جگہ ہی کہ خط ط است جو سطح احاطہ ہوتی ہیں ان کے رقبے کس طرح دریافت کریں گے مسئلہ کو بیان کر کے ہم دفعات بالا کے مقاصد کی تشریح کرتے ہیں



فرض کرو کہ فرض کی ایک خط منحنی ہے اور اس کی مساوات $x = \text{مچ (لا)}$ ہی اب مقصد ہمارا یہ ہے کہ سطح جو اس خط منحنی اور محور الامراء ان معینوں کے درمیان جو موافق محدود اور ص کے لئے جائیں واقع ہے اس کا رقبہ دریافت کریں فرض کرو کہ $ط = ط$ اور $ط = ص$ بعد اب کون برابر ہوں گے تقسیم کرو اور نقاط تیس سے معین کچھ فرض کرو کہ $ط = ط + (1 - ر)ھ$ تھ تو ہزاری اللہ تعالیٰ ع م ن ع کا رقبہ

$$\text{ھ مچ } [ط + (1 - ر)ھ]$$

اس صورت بیانہ میں رکھی ان تمام قیمتوں کے متفرک کرنے سے جو اور کے واقع ہوں جو محال جمع دریافت وہ رقبہ مطلوب کے تفاوت اتنا کہ یکجا جتنا کہ مجموعہ ان تمام حصص کا ہی جو متشابه شلنت ع قس کے ہیں اور چونکہ ان شکلوں میں سے جنہیں کے ایک ع م ن ق بے سب سی بڑی شکل سے یہ آخر مجموعہ بننا کہ معلوم ہوتا ہے تو ہم قصہ کو کم کر کے ایک نتیجہ ایسا حاصل کر سکتے ہیں کہ وہ رقبہ مطلوب کے اس قدر کم ہو جس قدر ہم چاہیں اس واسطے رقبہ منحنی حد غائی اس مسئلہ

کلی کا

ہستعال

$$[\text{مچ} (ط) + \text{مچ} (ب + هه) + \text{مچ} (ط + ۲ هه) + ۱۰۰۰۰ + \text{مچ} (ص - هه)]$$

کی برابر مچ (ص) - مچ (ط) ہے

(۸) اگر مچ (لا) سے ایک جملہ مچ (لا) سب جزوی لینے سے پیدا ہوتا ہو تو ہم اسکو اس
ساوان سے تعبیر کیا کرتے ہیں کہ

$$\text{مع مچ (لا) زلا = مچ (لا)}$$

اب ہم ترکیب مچ (لا) کی دریافت کرنے کی جب مچ (لا) معلوم ہو بیان کرتے ہیں ہم نے
دفعہ ۱۰۲ علم حساب الجربیات میں ثابت کیا ہے کہ اگر دو جملے ایک ہی سب جزوی لمبا ط
کسی مقدار متغیر کے رکھیں تو ان میں تفاوت کسی مقدار کا مستقل ہو سکتا ہے اسے معلوم
ہو کہ اگر مچ (لا) ایک جملہ ہو اور مچ (لا) اسکا سب جزوی لمبا ط لا کے ہو تو مچ (لا) پہلے
جس میں س ایک مقدار بالکل بے لگاؤ لا سے ہی فقط ایسی ایک ہی صورت ہو سکتی ہے کہ
جسکا سب جزوی وہی ہو جو پہلے تھا

پس طلبہ کو توڑے عرصہ تک یہی معلوم ہوگا کہ جربیات کا عکس کلیات ہی اور کلی لیا سب جزوی
لینے کا عکس ہے لیکن ہم نے اس علم کا آغاز جمع سے کیا ہے کیونکہ یہ جمع علم حساب الجربیات
کا مقصد اعظم اور مطلب اہم ہے

ہم اس بات کو دیکھتے ہیں کہ مچ (لا) اور مچ (لا) جملے لا کے ہوں تو

$$\text{مع} [\text{مچ} (لا) + \text{مچ} (لا)] = \text{مع مچ} (لا) \text{ زلا} + \text{مع مچ} (لا) \text{ زلا}$$

یعنی غایت یہ ہے کہ جن دو جملوں کو برابر لکھتے ہیں وہ صرف مقدار متقل کا فرق رکھ سکتے ہیں
کیونکہ اگر ہم دونوں کی سب جزوی لیں تو ایک ہی نتیجہ یعنی مچ (لا) + مچ (لا) حاصل ہوتا ہے
لوزینر اگر اس کوئی مقدار متقل ہو تو

$$\text{مع س مچ (لا) زلا} = \text{مع مچ (لا) زلا}$$

یعنی غایت یہ ہے کہ دو جملے صرف مقدار متقل کا تفاوت رکھ سکتے ہیں

(۹) بلا واسطہ کلی کا نکالنا

جب ایک جملہ سب خروئی دوسری جملہ کا سمجھا جا تو ہم اول جملہ کی کلی کو جان جائیگی ذیل میں تمام فہرست ایسے سادہ جملوں کی لکھی ہے

$$\text{مع } \frac{\text{زلہ}}{\text{لا}} = \text{لوک لا} \quad \text{مع } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

$$\text{مع } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \text{لوک لا} \quad \text{مع } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \text{لوک لا}$$

$$\text{مع جب لا زلا} = - \text{جم لا} \quad \text{مع جب لا زلا} = \text{جم لا}$$

$$\text{مع } \frac{\text{زلہ}}{\text{لا}} = \text{مس لا} \quad \text{مع } \frac{\text{زلہ}}{\text{لا}} = \text{مس لا}$$

$$\text{مع } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \text{جم لا} \quad \text{مع } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \text{جم لا}$$

$$\text{مع } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \text{مس لا} \quad \text{مع } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \text{مس لا}$$

(۱۰) اندراج سے کلی کا نکالنا

عمل کلی نکالنے کا مضامین اس طرح آسان ہو جاتا ہے کہ مقدار متغیر کی جگہ ایک حصہ ہی مقدار متغیر کا درجہ کریں فرض کرو کہ جملہ مع (لا) کی کلی نکالنی ہے اور لا اور ب حدود عالی کلی کی ہیں اب ظاہر ہے کہ ہم لا کو جملہ کسی جدید مقدار متغیر کے کا فرض کر سکتے ہیں بشرطیکہ کہ جملہ منتخب قابلیت اسکی رکھتا ہو کہ اوسین تمام قیمتیں لا کی جو کلی میں مطلوب ہوں فرض کر سکیں پس لا = ح (ے) کے رکھو اور اور ب قیمتیں کے کی فرض کرو جو ح (ے) بالہ کو برابر لا اور ب کے جدا گانہ کریں پس لا = ح (ا) اور ب = ح (ب) اب فرض کرو کہ مع (لا) وہ جملہ جو جسکا مع (لا) سب خروئی ہے یعنی یہ فرض کرو کہ مع (لا) = $\frac{\text{مع (لا)}}{\text{لا}}$ تو

$$\text{مع (لا)} = \text{مع (ب)} - \text{مع (ا)}$$

$$\text{مع (لا)} = \text{مع (ب)} - \text{مع (ا)}$$

$$\text{مع (لا)} = \text{مع (ب)} - \text{مع (ا)}$$

کلی نکالنا

اندراج سے

$$\text{اس واسطے } [ح (ب)] - [ح (ا)] = [د (ع) (ب) (ا)] = [د (ع) (ب) (ا)] \text{ زے}$$

$$\text{پس } [د (ع) (ب) (ا)] = [د (ع) (ب) (ا)] \text{ زے} = [د (ع) (ب) (ا)] \text{ زے}$$

اس نتیجہ کو نہایت سادی صورت میں اس طرح لکھتے ہیں کہ

$$[د (ع) (ب) (ا)] = [د (ع) (ب) (ا)] \text{ زے}$$

بشرطیکہ ہم اس بات کو خوب یاد رکھیں کہ پہلی کلی خاص حدود غائی اور ب کے درمیان لگتی ہے اور دوسری کلی حدود غائی اور ب کے درمیان

$$(۱) \text{ دفعہ گذشتہ کی مثال یہ بھی کہ مع } \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ مطلوب ہے}$$

$$\text{فرض کرو کہ } [د (ع) (ب) (ا)] = [د (ع) (ب) (ا)] \text{ اور } [د (ع) (ب) (ا)] = [د (ع) (ب) (ا)] \text{ پس}$$

$$\text{مع } \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} = \text{مع } \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ زے} = \text{مع } \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ زے}$$

$$= \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} = \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ زے}$$

$$\text{اب فرض کرو کہ مع } \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ مطلوب ہے } [د (ع) (ب) (ا)] = [د (ع) (ب) (ا)] \text{ کے مقرر کردہ}$$

$$\frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} = \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ اور مع } \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} = \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ زے}$$

$$\text{مع } \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} = \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ زے}$$

$$\frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} = \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ زے}$$

یہاں جو کلی نکالنے کے واسطے پیش ہوئیں ہم نے لکھی جا رہی اندراج کرنے سے اوٹ لگا کر نکالا ہے جس طرح کہ دفعہ گذشتہ میں بیان ہوا ہے اس عمل سے بعض اوقات کلی کا نکالنا آسان ہو گا مگر کوئی قاعدہ نہیں ہے کہ جسکی ہدایت کے موافق طلبہ اندراج کے واسطے جو فرض کریں وہ سب سے اچھا ہو اسلئے یہ امر طلبہ کی تجربہ اور مشق پر چھوڑ دیا جاتا ہے

(۱۲) بالہذا کلی کا نکالنا

$$\text{سادات } \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} = \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} + \frac{[د (ع) (ب) (ا)]}{[د (ع) (ب) (ا)]} \text{ زے}$$

کلی طرفین کی کلی نکالنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{موس} = \text{مع} \frac{\text{موس}}{\text{موس}} + \text{مع} \frac{\text{موس}}{\text{موس}} \text{ موس}$$

$$\text{اسوایطی مع} \frac{\text{موس}}{\text{موس}} = \text{موس} - \text{مع} \frac{\text{موس}}{\text{موس}} \text{ موس}$$

اس صورت قافونی کے استعمال کا نام بالذبحہ کلی نکالنا ہے

ایک خاص صورت میں فرض کر کے موس = لا موس حاصل ہو گا کہ

$$\text{مع} \frac{\text{موس}}{\text{موس}} = \text{موس} - \text{مع} \frac{\text{موس}}{\text{موس}} \text{ موس}$$

مثلاً مع لا موس لا موس پر ضیاء کرو تو کہ

$$\text{موس} \frac{\text{موس}}{\text{موس}} = \frac{1}{1} \text{ موس}$$

ہم سفر فرض صورت بیان کیا اس صورت میں نکلتے ہیں کہ

$$\text{مع} \frac{\text{موس}}{\text{موس}} \text{ موس}$$

اور یہ موجب صورت قافونی کے موس = مع اور موس = حب لا کے فرض کرنے سے

$$= \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} - \text{مع} \frac{\text{حب لا}}{\text{لا}} \text{ موس}$$

$$= \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{حم لا}}{\text{لا}}$$

$$\text{اب پہر مع لا حم لا لا موس} = \text{مع} \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} \text{ موس}$$

$$= \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} - \text{مع} \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} \text{ موس}$$

$$= \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} + \text{مع} \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} \text{ موس}$$

$$= \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا حم لا}}{\text{لا}} - \text{مع} \frac{\text{لا حم لا}}{\text{لا}} \text{ موس}$$

$$= \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا حم لا}}{\text{لا}} - \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}}$$

$$\text{پہر مع ہی لا حب لا لا موس} = \text{مع} \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} \text{ موس}$$

$$= \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} - \text{مع} \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} \text{ موس}$$

$$= \frac{\text{لا حب لا}}{\text{لا}} - \text{مع} \frac{\text{لا حم لا}}{\text{لا}} \text{ موس}$$

مناہجین

مثالین

1. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$ ہی $\frac{1}{2}$ ۔ (مجموعہ اول سے)۔ مع $\frac{1}{2}$ ہی $\frac{1}{2}$ ۔

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ جب $\frac{1}{2}$ ہی $\frac{1}{2}$ ۔ (مجموعہ اول سے)۔ مع $\frac{1}{2}$ ہی $\frac{1}{2}$ ۔

3. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{2}$ ہی $\frac{1}{2}$ ۔ (مجموعہ اول سے)۔ مع $\frac{1}{2}$ ہی $\frac{1}{2}$ ۔

4. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$ جب $\frac{1}{2}$ ہی $\frac{1}{2}$ ۔ (مجموعہ اول سے)۔ مع $\frac{1}{2}$ ہی $\frac{1}{2}$ ۔

اور اس طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

سبع سی لحم اللزله = (اس لحم اللزله) + (احسن لحم اللزله)

(۱۳) علم حساب النجریات سے جو قواعد منقرض ہو چکی ہیں ان کے مضافی جز کا نام جزہ فی الحساب ہے۔
مگر یہ حساب الکلیات میں یہ ضرور نہیں کہ جز کا یہ صروف ضد کی کلی کفلی الحی شلالہ اگر یہ قیاساً منقول ہو جائے تو
اس کے ہوتے میں لگا زائد = $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$ اور جب م = ۱۰۰ تو یہ صحیح نہیں ہے اس صورت میں
مع $\frac{1}{10}$ = لوگ لہ اگر ہم نے پہلے سے لفظ لوگ کا تھم کی معنی بیان کی ہوئے اور نہ خواہ لوگ کا دشمنی
تحقیقات کی ہوتی ہو مگر ہم کو یہ نہیں معلوم ہوتا کہ لہ کس حلیہ کا یہ جزوی جزو پس کلی کیوں کہانی میں
بہالا اختیار صحیح و اس وجہ سے یہ کہ علم نے بربک خاص بلکہ نام نہیں لکھا اور اس کے خواہش
کی تحقیقات نہیں کی غرض کلی کا نکالنا تجزیہ اور شق پر وقت بنی اس کے لئے قواعد عامہ نہیں ہیں
بلکہ وہ مختلف حکموں اور ترکیبوں کے حاصل ہوتی ہے

(۱۴) اب ہم چند مثالیں متفرق بیان کرتے ہیں

مثال (۱) $\sqrt{(9-5)}$ نه

$$\text{مع } (9-10) \text{ زلا} = \text{مع } (9-10) + \text{مع } \frac{(9-10)}{(9-10)} \text{ موجب دفعہ ۱۳ سے}$$

فرض کرو کہ $u = (1 - \eta)$ اور $v = \eta$

$$\text{اور مع } (x-1) \text{ زلہ} = \frac{x-1}{x-9} \text{ مع } \frac{x-1}{x-9} = \frac{x-1}{x-9} \text{ مع } \frac{x-1}{x-9}$$

اس واسطے جمع کرنے سے

$$\frac{u_i}{(u - g)_i} \text{ مع } g + (u - g)_i u = u_i (u - g)_i \text{ مع } r$$

اس واسطے سے کہ $\frac{d}{dx} \ln(x^2 - 9) = \frac{2x}{(x-3)(x+3)} + \frac{-2x}{(x-3)^2}$ لکھ کر

کلی نکالنے کی

شالین

۱۳

اور علیٰ بن ابی القیس کے = $\frac{1}{2}$ لہ + $\frac{1}{2}$ س مقرر کرنے سے ہم
مع ما (۱) + ب لہ + س لہ (۲) لہ کو موت (۲) شال پر کر سکتے ہیں

شال (۶) مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) = $\frac{1}{2}$ مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) = $\frac{1}{2}$ مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) کی جگہ لہ اور لہ - $\frac{1}{2}$ کی جگہ لہ رکھو تو کلی کی یہ صورت ہوگی کہ

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) سے یہ اخذ ہوتا ہے کہ $\frac{1}{2}$ جتا $\frac{1}{2}$ یا

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

اسی طرح لہ = لہ - $\frac{1}{2}$ کے فرض کرنے سے ہم مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) لہ کو

شال (۱) پر موت کر سکتے ہیں

شال (۱) مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

لہ = $\frac{1}{2}$ کے رکھو تو مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) = مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) = مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

چونکہ جتا $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ کہ ایک مقدار مستقل ہے تو آخر نتیجہ کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) = $\frac{1}{2}$ جتا $\frac{1}{2}$

شال (۸) مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

لہ = $\frac{1}{2}$ کے اسی طرح رکھو جس طرح شال (۱) میں رکھا تھا تو نتیجہ مطلوب یہ ہوتا ہوگا کہ

مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

شال (۹) مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ) اور مع ما $\frac{1}{2}$ (۱ + ب لہ + س لہ)

$$\text{مع } \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{1-d} - \frac{1}{1-d} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

مع $\frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)}$ لوگ $(1-d)$ کے نتائج میں سے کسی کو بھی معلوم ہو جائے

مثال (۱۰) مع $\frac{1}{(1-d)}$

$$\text{مع } \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

$$\frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

$$\frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

$$\frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

اس میں مثبت فرض ہو گیا اگر $\frac{1}{(1-d)}$ منفی ہو تو یہ کو اس طرح لکھا جائے کہ

$$\text{مع } \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

مثال (۱۱) مع $\frac{1}{(1-d)}$

$$\text{مع } \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

اگر $\frac{1}{(1-d)}$ منفی ہو تو موافق مثال (۱۰) کے ہم کلی نکال سکتے ہیں

$$\frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

اگر $\frac{1}{(1-d)}$ مثبت ہو تو موجب دفعہ ۹ کے کلی نتیجہ ہے کہ

$$\frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

مثال (۱۲) مع $\frac{1}{(1-d)}$

$$\text{مع } \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

$$\frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{(1-d)} - \frac{1}{(1-d)}$$

اول کی کلی $\frac{1}{(1-d)}$ لوگ $(1-d)$ اور دوسری کلی مثال (۱۱) میں دریافت ہو چکی ہے

مثال ۱۳ مع $\frac{1}{(1-d)}$

کلی نکالنے کی

شالین

۱۵

$$\text{مع زلد} = \text{مع حم ل زلد} = \text{مع زلد} - \text{مع زلد} = \text{مع زلد} - \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ لوگ } \frac{1}{1} = \text{موجب شال}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ لوگ } \frac{1}{1} = \text{موجب شال}$$

$$\text{کلی نکالنے کی} = \text{مع زلد} = \text{لوگ مس ل}$$

$$\text{شال (۱۲) مع زلد} = \text{مع زلد} + \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

$$\text{مع زلد} = \text{مع زلد} + \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

$$= \text{مع زلد} + \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

$$= \text{مع زلد} + \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

اسے معلوم ہوا کہ اگر ڈیڑا ب سے ہو تو کلی بدیہ ہے کہ

$$\frac{1}{2} \text{ مس ل} = \frac{1}{2} \text{ مس ل} + \frac{1}{2} \text{ مس ل} = \frac{1}{2} \text{ مس ل}$$

اور اگر ڈیڑا ب سے ہو تو

$$\frac{1}{2} \text{ مس ل} = \frac{1}{2} \text{ مس ل} + \frac{1}{2} \text{ مس ل} = \frac{1}{2} \text{ مس ل}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{2} \text{ مس ل} = \frac{1}{2} \text{ مس ل} + \frac{1}{2} \text{ مس ل} = \frac{1}{2} \text{ مس ل}$$

کلی نکالنے کی

$$\text{مع زلد} = \text{مع زلد} + \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

کہ مع زلد اور یہ بھی دریافت ہوئی تھی یا ہم اس طرح عمل کریں

$$\text{مع زلد} = \text{مع زلد} + \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

$$= \text{مع زلد} + \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

$$= \text{مع زلد} + \text{مع زلد} = \text{مع زلد}$$

کلی ثنائیہ کی

ثنائیت

اگر $\frac{1}{2}$ مثبت صحیح ہو تو (طو - ۱) $\frac{1}{2}$ کو ایک سلسلہ متناہی میں قرار دلو گے پس اس سلسلہ میں
 اور ہر ایک رقم صحیح یا سلسلہ اور طو $\frac{1}{2}$ کی کلی بلا واسطہ ہوگی
 پھر مع $\frac{1}{2}$ (۱ + ب ل) زلد = مع $\frac{1}{2}$ (۱ + ب ل) زلد
 اور جو صورت اول کے اگر $\frac{1}{2}$ + م

مثبت ہو یعنی اگر $\frac{1}{2}$ + م منفی صحیح ہو تو یہ کلی بلا واسطہ ہی اول میں اگر $\frac{1}{2}$ منفی صحیح تھا تو
 کلی لا بہی دریافت ہو سکتی ہے اسکا ذکر دوسرے باب میں کریں گی اور علیٰ ہذا القیاس دوسری
 صورت میں اگر $\frac{1}{2}$ + م مثبت صحیح ہو تو ہم نہیں کہہ سکتے ہیں کہ کلی بلا واسطہ ہی اس واسطے
 کہ ایسی صورتیں بہت سے استحالوں کی ضرورت ہوتی ہے

مثال مع $\frac{1}{2}$ (۱ + ل) زلد
 یہاں $\frac{1}{2}$ = ۳ فرض کرو کہ ۱ + ل = طو تو کلی کی یہ صورت ہوگی
 ۲ مع (طو - ۱) طو زطو یا ۲ مع (طو - ۲ طو + طو) زطو
 اسے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\left[\frac{2}{3} \frac{1}{\text{طو}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\text{طو}} - \frac{1}{3} \frac{1}{\text{طو}} \right] \frac{1}{3} \frac{1}{(1+ل)} = \frac{1}{3} \frac{1}{(1+ل)} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+ل)} - \frac{1}{3} \frac{1}{(1+ل)}$$

مثال (۱) مع $\frac{1}{2}$ (۱ + ل) زلد
 یہاں م = ۱ اور ن = ۲ اور $\frac{1}{2}$ = ۱ اس واسطے $\frac{1}{2}$ + م = ۱ = $\frac{1}{2}$ + م

فرض کرو کہ ۱ + ل = طو اس واسطے ل = طو - ۱ = $\frac{1}{2}$ (طو - ۱) زلد
 اور نیز مع $\frac{1}{2}$ (۱ + ل) زلد = مع $\frac{1}{2}$ (۱ + ل) زلد
 ل اور زلد کی جگہ اوٹکی قیمتیں مندرج کرو تو یہ ہو جائیگا کہ - مع زطو

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(1+ل)} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1+ل)}$$

مثال ۳ مع $\frac{1}{2}$ (۱ + ل) زلد

- (۱۶) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۱۷) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۱۸) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۱۹) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۰) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۱) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۲) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۳) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۴) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۵) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۶) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۷) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۸) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۲۹) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$
- (۳۰) مع $\frac{1}{\text{لوگ } (ل)} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{(ل-۱)} - \frac{1}{(ل-۱) \text{ لوگ } (ل)}$

(۳۱) مع $\frac{1}{(1-x)^2}$ زلہ = برس بر + لوک جم بر حسین جب بر = لہ

$$(۳۲) \text{ مع } \frac{z}{r(1-\beta)} = \frac{1}{r} (\text{ممبر} + \frac{r}{1-\beta}) \text{ اسلین لہ } = 1 \text{ جم بر}$$

$$\frac{u}{1} - \frac{u}{(1+u)^n} = \frac{u}{1+u} + \frac{u}{1+u} + \dots + \frac{u}{1+u} + \frac{u}{(1+u)^n}$$

$$(b+1)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{b+1}{c^3}\right) = a: (b+1)\sqrt{a} \quad (33)$$

$$\frac{(n+1)^n (1-nr)}{n^n (1-r)} = \frac{n^n}{(n+1)^n n^n} \text{ مع } (30)$$

(۳۶) مع مسن برزبر = $\frac{1-2n}{1-n}$ - مع مسن ۲- برزبر

$$= (1-p) + p(1-p) + \dots + \frac{p^{n-1}(1-p)}{1-p} = 1$$

۱۱ = مسرے کے لئے

(۳) ثبات کرو کہ بیع جب ملاحظہ بن لازلہ او بیع حجم ملاحظہ بن لازلہ

صفر میں اگر م اور ن غیر مساوی صحاح میں اور = کہے اگر م اور ن برابر صحاح میں

$$(3) \text{ مع } [لوک] \left(\frac{y}{x}\right) = y - [لوک] \left(\frac{y}{x}\right) - 3 - 4 + [لوک] \left(\frac{y}{x}\right) + 4 - [لوک] \left(\frac{y}{x}\right) = 4 - 3 = 1$$

(۳۹) مع $\frac{1}{(n+1)}$ زائد $= \frac{1}{n}$ - بر بس بر - کوک جم بر اسمین مم بر = ل

$$\frac{\sqrt{u-1} \sqrt{u}}{u+1} - \frac{\sqrt{u-1}}{(u-1)} \sqrt{u} = u \cdot \frac{\sqrt{u-1}}{(u+1)} \cdot \frac{u+1}{u+1} \text{ etc.}$$

(۱۳) مع $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x}{x^2}$

(۴۲) مجموع = $\frac{1}{(1-s)^n}$ تم اسن اگر س کم بہ نسبت اکے ہو

(۳۴) $\frac{1}{x} = \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)(x+3)}$

(۴۷) $\frac{(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}}$ از $\frac{1}{x} + u = 1$ فرض کرد که

(۱۵) مع $(1 + \frac{1}{n})^n$ فرض کرو کہ $1 + \frac{1}{n} = e$

کسور اور اجزاء ضربی کی تعداد کم بیش ہوگی
چونکہ ن درجہ کا موہی اس واسطے پیدا حاصل ہوتا ہے کہ

$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 6$$

$$\frac{1}{\text{لا-ط}} + \frac{1}{\text{لا-ص}} + \frac{1}{\text{لا-ض}} + \frac{1}{\text{لا-ز}} + \dots + \frac{1}{\text{لا-ح}} + \frac{1}{\text{لا-ج}}$$

$$\frac{1}{\text{لا-ط}} + \frac{1}{\text{لا-ص}} + \frac{1}{\text{لا-ض}} + \frac{1}{\text{لا-ز}} + \dots + \frac{1}{\text{لا-ح}} + \frac{1}{\text{لا-ج}}$$

اس میں لا اور ب اور م ... س و د و ی ... مستقل میں اب ہم اپنے مفروض باتوں کے صحیح اور درست ثابت کر نیکی واسطے اونکو ایسا تشخیص کرتے ہیں کہ جسے دوسرا رکن اوپر کی مساوات کا اول رکن کے ساتھ تطبیق پائے اگر کم سو جزئیہ کا نسب نامہ کیاں کریں اور اونکو باہم جمع کریں گونب ناما تو موہوگا اور شمار کنندہ جملہ (ن-۱) دین درجہ کا لا کا موہوگا اب اگر اس شمار کنندہ میں لا کی قوائ مختلفہ کے امثال کو اوویں لکھتے تو مختلفہ کے امثال کو متساوی موافق اپنی اپنی نظیر کے لکھیں تو ن مساواتیں درجہ اول کی حاصل ہونگی اور ان مقام پر لا و ب اور م ... تشخیص ہونگی اور لا و ب اور م ... کی ان قیمتوں کے دوسرا رکن اوپر کی مساوات کا متطابق اول رکن کے ہو جائیگا

پس اس طرح کو کی تجزی سلسلہ کسور جزئیہ میں ہو جائیگی

اگر موہی اور اجزاء ضربی مفردہ مثل لا-ط کے ملحق ہوں تو ہر ایک جز ضربی سے ایک مثل لا-ط کے پیدا ہوگی اور کوئی جز ضربی مکررہ مثل (لا-ص) کی سلسلہ کسور جزئیہ کا اس صورت کا پیدا کریگا کہ $\frac{1}{\text{لا-ص}} + \frac{1}{\text{لا-ض}} + \dots + \frac{1}{\text{لا-ح}} + \frac{1}{\text{لا-ج}}$ وغیرہ اور اس طرح اور اجزاء ضربی میں صورت لا-ط سے لا-ص + صک یا (لا-ط + لا-ز + مرا) سے ایک نئی پیدا ہوگی

یا ایک سلسلہ کسور پیدا ہوگا جنکے صورت اوپر ہم نے بتلا دی ہے

(۱۷) دفعہ ۱۶ میں جو اثبات لکھا ہی وہ سب طرح سے قابل الطمینان نہیں ہے کیونکہ یہ نہیں ثابت کیا کہ ان مساوات میں جو اہل درجہ کی حامل ہوتی ہیں اور ان کے ل و ب اور پ

وغیرہ تشخیص ہوتے ہیں وہ آپس میں بالکل بے لگاؤ اور موافق ہیں

ایک ترکیب نہایت مستحکم سترہ سو ہر شام کو کس نے اپنی رسالہ علم انکلیات میں لکھی ہے مختصر بیان ہم کرتی ہیں فرض کرو کہ ج (ل) میں خبر ضربی لا - ط مکرر ن دفعہ آتا ہو اگر

$$ج (ل) = (لا - ط) (ط) (ل) \text{ صحیح } (لا)$$

تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ج (ل)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ل)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ل)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ل)}{ج (لا)}$$

اب ج (لا) - ج (ط) صحیح (ط) صحیح (لا) = ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا) = ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا) = ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا)

فرض کرو کہ اس تقسیم میں خارج قسمت صفر (لا) نکلتا ہی تو

$$\frac{ج (لا)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا)}{ج (لا)}$$

اب وہی عمل مکرر کر کے اور سب طرح متواتر اعمال کے کرنے سے

$$\frac{ج (لا)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا)}{ج (لا)}$$

کی تخریج پوری ہو جائیگی اس اثبات میں ط کیا ایک حقیقی قیمت یا ایک خیالی قیمت مساوات

ج (لا) = کی ہو سکتی ہے اگر ط = صہ + صہ (۱ - ۱) تو صہ - صہ (۱ - ۱) ہی

اہمیت ج (لا) = کی ہوگی اب فرض کرو کہ اس قیمت کو ص تعبیر کرتا ہی اب اگر دونو

کسر جزئیہ کو جمع کریں تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ج (لا)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا)}{ج (لا)} = \frac{ج (لا) - ج (ط) صحیح (لا)}{ج (لا)}$$

اب ایک نتیجہ حاصل ہوگا جو صہ (۱ - ۱) سے خالی ہوگا

(۱۸) دفعہ ۱۷ کی مانند (۹) اور (۱۲) کی طرف ان تمام کسور جزئیہ کی نکالنے کے واسطے

رجوع کریں مگر ایک یہ صورت ہو سکتی ہے کہ ل + لا + م + م (لا - ل + لا + ل + م + م) اسکا بیان متعاقب ہوگا جب اس بات کو ثابت کر کے کہ سب ناطق کی تخریج دفعہ ۱۷ کی طرح ہو سکتی ہے ہم مختلف طرح کی

جبریت حکمتین کام میں لائے ہیں جسے کہ مبحث لا اور با اور با کی تشخیص کر سکیں گے
 چونکہ شمار کنندہ کے مفروض کا اور وہ شمار کنندہ جو کسور جزیئہ کے جمع کرنے سے پیدا ہوتا ہے ازراہ
 مطابق کے مساوی ہیں یعنی دو نو ایک ہیں اسلئے یہ نہایت بکا آمد خیال ہی کہ یہ مساوات نہیں
 قائم رہ سکی اگر ہم مقدار متغیر لا کی کہ واسطے کوئی قیمت متعین کریں

(۱۹) وہ کسور جزیئہ تشخیص کرو جو موافق ایک جبر ضربی درجہ اول کی ہو

فرض کرو کہ $\frac{ج}{(لا)}$ کسے جسکی تجربی منطوب ہے اور $(لا)$ میں جبر ضربی لا۔ ط
 ایک دفعہ آتا ہے فرض کرو

$$\frac{ج}{(لا)} = \frac{1}{لا-ط} + \frac{ھر}{(لا)} + \dots + (۱)$$

اسمیں لا ایک مقدار مستقل ہے اور $\frac{ھر}{(لا)}$ تمام کسور جزیئہ کے مجموعہ کو ہشتا $\frac{1}{لا-ط}$ کے
 تعبیر کرتا ہے اور $(لا) = (لا-ط) + ھر$ (۱)

$$\frac{ج}{(لا)} = 1 + \frac{ھر}{(لا-ط)} + \dots (۲)$$

(۲) میں جولہ کے سب قیمتوں پر حاوی ہے $لا = ط$ کے مقرر کرو تو

$$\frac{ج}{(ط)} = 1 + \frac{ھر}{(ط)}$$

چونکہ $\frac{ج}{(لا)} = \frac{ج}{(لا-ط)} + \frac{ھر}{(لا)}$ اس واسطے کہ کو یہ حاصل ہوتا ہی

$$\frac{ج}{(ط)} = 1 + \frac{ھر}{(ط)}$$

(۲) کسور جزیئہ موافق اول درجہ کے جبر ضربی کے جو کرائیں تشخیص کرو

فرض کرو کہ $\frac{ج}{(لا)}$ میں ایک جبر ضربی لا۔ ط مکرر دفعہ آتا ہی اور $(لا) = (لا-ط) + ھر$ (۱)

$$\frac{ج}{(لا)} = \frac{1}{لا-ط} + \frac{1}{لا-ط} + \dots + \frac{1}{لا-ط} + \frac{ھر}{(لا)}$$

اسمیں $\frac{ھر}{(لا)}$ سے وہ تمام کسور جزیئہ تعبیر ہوتی ہیں جو اور اخبار ضربی $\frac{ج}{(لا)}$ سے پیدا ہوتی ہیں

طرفین ا و ا کو (لا-ط) میں ضرب دو اور ح (لا) کو بجای مچ (لا) (لا-ط) کے کہو تو
 ح (لا) = ۱ + ۱م (لا-ط) + ۱س (لا-ط) + ... + ۱ن (لا-ط) + ۱ھر (لا) مچ (لا) (لا-ط)
 اس مطابق کہ طرفین کا متواتر سر جزوی لو اور بعد سر جزوی لینے کے لا = ط کے کہو تو

$$۱ = (ط) ۱$$

$$۱م = (ط) ۱م$$

$$۱س = (ط) ۱س$$

$$۱ن = (ط) ۱ن$$

$$۱ھر = (ط) ۱ھر$$

$$۱ن = (ط) ۱ن$$

پس ۱، ۱م، ۱س، ۱ن، ۱ھر کی تشخیص ہوگی کہ جو کور نہیں واقع ہوتے دریافت کرو
 (۲۱) کسور جزئیہ موافق ایک زوج خیالی جذرون کے جو کور نہیں واقع ہوتے دریافت کرو

فرض کرو کہ مچ (لا) اوکس کو تعبیر کرتی ہی جسکی تجربی منظور ہے اور سہ ± صہ (لا) (۱-)
 ایک زوج خیالی جذرون کا ہی اب اگر ان جذرون کو ط اور ص سے تعبیر کریں اور دفعہ ۱۹ کے
 موافق عمل کریں تو کسور جزئیہ کے واسطے یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱}{ح (ط)} \text{ اور } \frac{۱}{ح (ص)}$$

$$\frac{۱}{ح (ط)} = ۱ - ب (۱-)$$

فرض کرو کہ مچ (ط) = ۱ - ب (۱-) تو اس سبب کہ مچ (ص) حاصل
 حاصل مچ (ط) سے اس طرح ہو سکتا ہے کہ (۱-) کی علامت بدل دیں تو یہ حاصل ہونا چاہیے کہ

$$\frac{۱}{ح (ص)} = ۱ + ب (۱-)$$

$$\frac{۱ - ب (۱-)}{لا - سہ ± صہ (۱-)} \text{ اور } \frac{۱ + ب (۱-)}{لا - سہ ± صہ (۱-)}$$

$$\frac{۱ - ب (۱-)}{لا - سہ ± صہ (۱-)} \text{ اور } \frac{۱ + ب (۱-)}{لا - سہ ± صہ (۱-)}$$

اور اونکا مجموعہ
 (۲۲) یا ہم اس طرح عمل کر سکتے ہیں کہ لا - سہ ± صہ (۱-) کو درجہ دوم کا ایسا جزئیہ
 فرض کریں کہ اوکس کے زوج خیالی جذرون سہ ± صہ (۱-) کا پیدا ہو تو فرض کرو کہ

$$\frac{\text{ج (لا)} = \frac{\text{ل (لا+م)} + \frac{\text{ل (لا+م)}}{\text{ع (لا+ق)}} + \frac{\text{ع (لا+ق)}}{\text{ج (لا)}}}{\text{ج (لا)}}$$
 پس ج (لا) = (لا+م) ج (لا) + (لا+م) ع (لا+ق) + (لا+م) ج (لا) ... (۱)
 اب ل کی کوئی ایسی قیمت متعین کرو کہ لا+ع+ق کو معدوم کرے تو (۱) کے
 یہ صورت ہو جائیگی کہ

ج (لا) = (ل+لا+م) ج (لا) ... (۲)
 اب ع+لا+ق کو بجای ل کے دو نو اراکان مساوات (۲) میں رکھنے سے اخر کار لا صرف اول
 قوت کی صورت میں نمایان ہوگا اور مساوات کی یہ صورت ہو جائیگی کہ

$$\text{ع+لا+ق} = \text{ع+لا+ق}$$
 اب ل کی جگہ اس کی قیمت سر + صدہ (۱) رکھو اور ناممکن اجزا کو متساوی لکھو تو

$$\text{ع} = \text{ع} \text{ اور } \text{ع} = \text{ق}$$
 یہاں ع اور ق مقادیر معلوم ہیں اور ع اور ق میں مقادیر مجهول لی اور م
 اول درجہ کی لطف ہیں اب دو مساواتیں درجہ اول کی لی اور م کے دریافت کر نیکی
 واسطے حاصل ہوئیں

(۲۳) کسور خریفہ موافق زوج خیالی جدر و ک کے جو کر آتے ہیں تنخیز کرو
 ہم عمل دفعہ ۲۰ کی طرح کر سکتے ہیں یا اس ترکیب کو اختیار کریں کہ فرض کرو لا+ع+ق
 درجہ دوم کا جز فرضی ہے جو رد دفعہ واقع ہوتا ہے

$$\frac{\text{ج (لا)} = \frac{\text{ل (لا+م)} + \frac{\text{ل (لا+م)}}{\text{ع (لا+ق)}} + \frac{\text{ع (لا+ق)}}{\text{ج (لا)}}}{\text{ج (لا)}}$$
 پس ج (لا) = (لا+م) ج (لا) + (لا+م) ع (لا+ق) + (لا+م) ج (لا) ... (۱)
 ج (لا) = (ل+لا+م) ج (لا) + (ل+لا+م) ع (لا+ق) + (ل+لا+م) ج (لا) ... (۱)

کسور
اب کوئی قیمت لدا کی ایسی ضرر کرو کہ لدا سے لدا + ق کو ملامت کر کے پس لدا کی
یہ صورت ہو گی کہ

$$\text{مچ (لدا)} = (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)}$$

دفعہ ۲۲ کی طرح عمل کر کے ا اور م کو دریافت کرو تو عمل انتقال سے (۱) کے یہ تصور ہو گا

$$\text{مچ (لدا)} - (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)} = (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)} - (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)}$$

بلین طرف کے رکن میں ہر رقم کے اندر خبر فی لدا سے لدا + ق بنتا ہے ملامت ہو کہ تو باقی

ا مکان متطابق بریا سلا اس خبر فی تقسیم کر سکتے ہیں فرض کرو کہ دائیں طرف جو مختار

حاصل ہو وہ مچ (لدا) سے تعبیر ہوتا ہے تو

$$\text{مچ (لدا)} = (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)} + (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)}$$

$$+ \dots + (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)} + \dots + (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)}$$

(۲) سے ہم لدا اور م کو مافق سابق کے دریافت کر سکتے ہیں تو عمل انتقال کی تقسیم

$$\text{مچ (لدا)} = (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)} + (\text{لدا} + \text{م}) \text{ مچ (لدا)}$$

اور علی بن القیاس جب تک تمام مقادیر تخصیص ہو

$$\text{مثال} \quad \frac{\text{لدا} - \text{لدا} - \text{لدا}}{(\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا})^2 (\text{لدا} + \text{لدا})}$$

$$\frac{\text{لدا}}{(\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا})^2} + \frac{\text{لدا}}{(\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا})^2} + \frac{\text{لدا}}{(\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا})^2}$$

$$\text{تو لدا} - \text{لدا} - \text{لدا} = (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا})^2 (\text{لدا} + \text{لدا})$$

$$+ (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا}) (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا}) + (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا}) \text{ مچ (لدا)} \dots (۳)$$

فرض کرو کہ لدا + لدا + لدا = ۰ پس اوات کی یہ صورت ہو جائیگی کہ

$$\text{لدا} - \text{لدا} - \text{لدا} = (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا}) (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا})$$

$$- \text{لدا} - \text{لدا} - \text{لدا} = (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا}) (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا})$$

$$- \text{لدا} - \text{لدا} - \text{لدا} = (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا}) (\text{لدا} + \text{لدا} + \text{لدا})$$

$$= \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{پس } 1 = 1 \text{ اور } 1 = 1$$

(۳) میں عمل انتقال سے

$$\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

دائیں طرف کا رکن $1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1+1}$ ہے لہذا $1 + \frac{1}{1+1}$ پر تقسیم کرو

$$\text{تو } (1 + \frac{1}{1+1}) = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

یہ فرض کرو کہ $1 + \frac{1}{1+1} = 1$ تو

$$1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$= \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{اسی طرح } 1 = 1 \text{ اور } 1 = 1$$

$$\text{پس } 1 = 1 \text{ اور } 1 = 1$$

پس کسور خربہ موافق خربہ نمبری درجہ دوم دریافت ہو گئیں اور کسور خربہ موافق خربہ نمبری (۱) کے موافق دفعہ ۱۰ کے دریافت ہو سکتی ہیں اور (۲) سے انتقال اور لہذا $1 + \frac{1}{1+1}$ پر تقسیم کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{پس } \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

(۲۷) مثلاً کلی $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$ دریافت کرو

تقسیم سے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۲۹ - ۱۵}{۲ + ۳ - ۱۵} + ۱۵ + ۱۵ = \frac{۱ + ۱۵}{۲ + ۳ - ۱۵}$$

$$\frac{۲۹ - ۱۵}{۲ + ۳ - ۱۵} + \frac{۱}{۱ - ۱۵} = \frac{۲۹ - ۱۵}{۲ + ۳ - ۱۵}$$

$$۳۵ - ۱۵ = ۲۹ - ۱۵ = ۱ (۲ - ۱۵) + ۱ (۱ - ۱۵)$$

لاکو متواتر برابر اور ۲ کے مقرر کر دو

$$۲۹ - ۳۵ = ۲۹ - ۱۵ = ۱۴$$

$$۲۹ - ۴۰ = ۲۹ - ۱۵ = ۱۴$$

$$\frac{۲۹}{۲ - ۱۵} + \frac{۱}{۱ - ۱۵} - ۱۵ + ۱۵ = \frac{۱ + ۱۵}{۲ + ۳ - ۱۵}$$

$$\frac{۲۹ + ۱۵}{۲ + ۳ - ۱۵} = \frac{۲۹ + ۱۵}{۲ + ۳ - ۱۵} + \frac{۱۵ - ۱۵}{۲ - ۱۵} + \frac{۱۵ - ۱۵}{۱ - ۱۵} + \frac{۱۵ - ۱۵}{۲ - ۱۵}$$

$$\frac{۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵}{۹ + ۱۳ + ۱۵ - ۱۵}$$

چونکہ ۱۵ - ۱۵ = ۰ لہذا ۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵ = ۱۲۸ لہذا ۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵ = ۱۲۸

$$\frac{۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵}{۹ + ۱۳ + ۱۵ - ۱۵} = \frac{۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵}{۹ + ۱۳ + ۱۵ - ۱۵}$$

$$\frac{۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵}{۹ + ۱۳ + ۱۵ - ۱۵} = \frac{۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵}{۹ + ۱۳ + ۱۵ - ۱۵}$$

۱۵ = ۳ اور ۱۵ متواتر فرض کرو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$۱۵ = ۳ اور ۱۵ = ۱$$

اور نیز لاکے اشال کو مساوی لکھنے سے یکو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{۱۵}{۱۵} = \frac{۱۵}{۱۵}$$

$$\frac{۱۵}{۱۵} = \frac{۱۵}{۱۵}$$

$$\frac{۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵}{۹ + ۱۳ + ۱۵ - ۱۵} = \frac{۱۲۸ - ۱۵ + ۱۵}{۹ + ۱۳ + ۱۵ - ۱۵}$$

$$\frac{۱ + ۱۵}{(۱ + ۱۵)}$$

$$\frac{۱ + ۱۵}{(۱ + ۱۵)}$$

$$\frac{۱}{(۱ - ۱۵)} + \frac{۱}{(۱ - ۱۵)} + \frac{۱}{(۱ - ۱۵)} + \frac{۱}{(۱ - ۱۵)} + \frac{۱}{(۱ - ۱۵)} + \frac{۱}{(۱ - ۱۵)} =$$

$$(1+x) \left[(1-x)^n + (1-x)^{n-1} + (1-x)^{n-2} + \dots + 1 \right] = 1+x$$

$$(1) \dots (1-x) \left[(1+x)(1+x+\dots+x^n) + (1+x)(1+x+\dots+x^{n-1}) + \dots + (1+x)(1+x+\dots+x^2) + (1+x)(1+x+\dots+x) + (1+x)(1+x+\dots+1) \right]$$

(۲) ... ۱ = ۱ کے برابر تو =

(۱) اور (۲) سے تفریق کرنے میں یہ حاصل ہوتا ہے کہ

(۱) $\frac{1}{(1-d)} = \frac{1}{1} + d + d^2 + d^3 + \dots$
 (۲) $\frac{1}{(1+d)} = \frac{1}{1} - d + d^2 - d^3 + \dots$

(۳) اور (۴) سے تفریق کرنے میں یہ حاصل ہوتا ہے کہ

[illegible]

(۵) اور (۶) سے تفریق کر نہیں یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(1+\lambda)^0(1-\lambda)^0 + (1-\lambda)^0(1+\lambda)^1 + (1-\lambda)^1(1+\lambda)^0 + (1-\lambda)^1(1+\lambda)^1 = 0$$

یعنی ۲ جم منق بر (لا۔ جنق بر) - جب منق بر جب منق بر

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$$

۱ جم منق بر (لا۔ جم منق بر) - جب منق بر جب منق بر

اسمین جج اوس مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے جو نق کی تمام جفت قیمتیں اسے ان - ۲ تک مقرر کرنے سے فتاب اسے معلوم ہوگا کہ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$$

۱ جم منق بر لوک (لا۔ ۲ جم منق بر) - جب منق بر جب منق بر
(۲۶) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$ کی کمی دریافت کرو ن طاق فرض کیا گیا ہے

حقیقی جذبین $\frac{1}{1} = 1$ کے ابے اور خیالی جذبین صورت بیانہ

جم منق بر $\frac{1}{1} = 1$ جب منق بر سے دریافت ہوتی ہیں اسمین بر = کچ
اور نق کی متواتر قیمتیں ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ تک مقرر ہوتی ہیں اسے معلوم ہوگا کہ موافق سابق
ہم کو یہ دریافت ہوگا کہ

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$$

- جب منق بر جب منق بر

(۲۷) کلی $\frac{1}{1} = 1$ کی دریافت کرو ن سخت فرض کیا گیا ہے

سادات $\frac{1}{1} = 1$ کی کوئی جد حقیقی نہیں اور خیالی جذبین اس صورت بیانہ
جم منق بر $\frac{1}{1} = 1$ جب منق بر سے دریافت ہوتی ہیں اسمین بر = کچ اور نق کی متواتر قیمتیں
۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ تک مقرر کی جاتی ہیں اور اگر جذ $\frac{1}{1} = 1$ کے ہو تو یہ حاصل

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}$$

مع $\frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$ ج تم م ثق بر لوگ (لا - ۲ لہم می بر + ۱)

اسمین جج اوس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی ہونق کی تمام صحیح طاق قیستوں سے کہ در میان اور ن - واقع ہن نشاے

(۲۸) $\frac{1-2}{1+2}$ کی کلی دریافت کرو اور ن طاق فرض کیا گیا ہے

لا + ۱ = کی حقیقی جذر اس صورت میں - ۱ ہی اور خیالی جذرین او سکی اس صورت بیانہ
جم ثق بر ± (۱ - ۲) جب ثق بر سے تعبیر ہوتی ہے اسمین بر = کج اوزق کی متواتر قیستیں
۱ و ۳ . . ۲ - تک مقرر ہوتی ہیں اسے معلوم ہوا کہ ہکو یہ حاصل ہو گا کہ

مع $\frac{1-2}{1+2} = \frac{1-2}{1+2}$ کوک (لا + ۱)

- $\frac{1}{3}$ ج جم می بر لوگ (لا - ۲ لہم می بر + ۱) + $\frac{1}{3}$ ج جم می بر سوا - لہم می بر
(۲۹) اب ہم بعض کیفیتیں کسور جزئیہ کی تجزی کے باب میں لکھ کر اس باب کو ختم کرتی ہیں

اول فرض کرو کہ کسر ج (لا) کو کسور جزئیہ میں تجزی کرنی ہے اسمین جج (لا)
ادنے درجہ کا جملہ ج (لا) سے نہیں ہے ج (لا) کو ج (لا) پر تقسیم کرو
اور فرض کرو کہ خارج قسمت ج (لا) نکلتا ہی اور جج (لا) باقی رہتا ہی تو

جج (لا) = جج (لا) ج (لا) + جج (لا) (لا)
اسو $\frac{جج (لا)}{ج (لا)} = جج (لا) + \frac{جج (لا)}{ج (لا)}$

اب اسکے موافق ہو جج (لا) کی تجزی کسور جزئیہ میں کرتی ہے اب اس بات پر غور کرو کہ
ہکو وہی قیستیں کسور جزئیہ کی حاصل ہو گئیں خواہ ہم ترکیب دفعات ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲ اور ۲۳ کی
جج (لا) پر یا جج (۵) پر کام میں لائیں شل صورت دفعہ ۱۹ کی تو اس سبب کہ جو جب
فرض کے ج (ط) = جج (لا) جج (لا) ج (لا) + جج (لا) یہ حاصل ہوتا ہی کہ
جج (ط) = جج (ط)

دوہم ۱ و ۱۰۰ کی قیمتوں پر دفعہ ۲۰ میں خیال کرنے سے ہکو بہ و کھا ہی دیتا، کہ نتیجہ
ذیل حکم ہے فرض کرو کہ اسے ۱ تک جتنی صلاح ہیں اونین سے ہر ایک کی جگہ رہتا تھا ہی صورت
مفصلہ ج (۱+۱) کی صورت مفصلہ قواء ہ میں جو ہوگی اوسکے اندر ۱ برابر ہوگا

۱۱ کے امثال کے پس موافق اسکے ہکو ۱۱ معمولی اعمال جریہ سے معلوم ہوگا
مثلاً فرض کرو کہ (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) کی تجزی کسور جزئیہ میں کرنی ہے کسور جزئیہ کو

$$\frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots$$

سے تعبیر کرو یہاں ج (۱) = (۱-۱) ص ۱ ع ۱ ا س واسطے (۱-۱) ص + ۱ ع کی صورت

مفصلہ جو قواء ہ میں ہوگی اوسکی اندر ۱۱ کے امثال برابر ہوگی ۱۱ کے

اور ضابطہ جملہ ثنائی کے موافق صورت مفصلہ حاصل ہوگی اور اسطرح سے ہکو بہ حاصل ہوگا

$$1 = \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots$$

اور اسطرح اگر اسے ۱ تک جو صلاح ہیں اونین کے کسی ایک کی جگہ قائم ہو تو
(۱-۱) ص + ۱ ع کی صورت مفصلہ جو قواء ہ میں ہوگی اوسمیں ۱۱ کے امثال
برابر فرسوں کے ہوگی

سوم فرض کرو کہ

$$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots$$

یہاں ج (۱) اور ج (۱) ایک ہی درجہ کے ہیں ج (۱) کی تجزی سے رقم ۱۱ کے
مع ایک سلسلہ کسور جزئیہ کے حاصل ہوگی جنہیں سے ایک زوج کو

$$\frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{1-1} + \dots$$

سے تعبیر کرو اس میں قی بجائے ۱ کے ہے

(۵) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{5}{r} - \frac{1}{r} = \frac{4}{r}$ مست $\frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 0$ لوک $\frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 0$

(۶) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ مست $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۷) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ مست $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۸) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۹) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۰) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۱) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۲) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۳) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۴) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۵) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۶) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۷) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

(۱۸) مع $\frac{r}{r} - \frac{r}{r} = 0$ زلد $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ لوک $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

باب سوم
استحاله کی صورت قانونیہ

استحالیہ کی صورت قانونیہ

۴۰ مساوات (۴) دفعہ گذشتہ کے ساتھ مطابقت ہو تا ہے

اب پھر فرض کرو کہ مع $\frac{ز}{(ط+ل)۱}$ مطلوب ہے تو

$$\text{مع } \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱} + \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

$$= \frac{ز}{(ط+ل)۱} + \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

$$= \frac{ز}{(ط+ل)۱} + \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

عمل انتقال سے

$$(۱+م) ط مع \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱} - م مع \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

م کو م سے بدل دو تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$(۲) \dots \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱} - \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

ایک اور مثال یہ ہے کہ مع $\frac{ز}{(ط+ل)۱}$ دریافت کرو اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{مع } \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱} - \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

ع = - - رکھیں اور ط اور م کو ۲ ط اور م + ۱ سے جدا کرنا تبدیل کریں تو یہ حاصل ہو گا

$$(۳) \dots \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱} + \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

اور یہ بلا واسطہ دریافت ہو سکتی ہے

(۳۲) دفعہ ۳ کی مساوات (۶) میں ط = س اور م = ۱ اور ن = ۲ اور

ص = ۱ اور ع = - - رکھو تو

$$\text{مع } \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱} + \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

یہ صورت قانونیہ صورت دفعہ ۱۸

$$\text{مع } \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱} + \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

کے استحالیہ کے کام میں ایسے کے یہ ان صورت بیانہ اس طرح لکھی جاسکتی ہے کہ

$$\text{مع } \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱} + \frac{ز}{(ط+ل)۱} = \frac{ز}{(ط+ل)۱}$$

استحالیہ کی صورت قانونیہ ۴۱
اور لہ - سہ = لہ کے رکھنے سے ہکو یہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مع} \left[\frac{\text{لہ} - \text{سہ}}{\text{لہ}} + \text{صلہ} \right] = \text{مع} \left[\frac{\text{لہ}}{\text{لہ}} + \text{صلہ} \right]$$

پس اوپر کی صورت قانونیہ قابل کام میں آنے کے ہوگی
(۳۳) یہ استحالیہ کی صورت قانونیہ وہاں بڑا کام دیتی ہیں جہاں کلی خاص حد و غائی کے ہیں

کٹانی پڑتی ہیں فرض کرو کہ مع (لہ) و ہر (لہ) و مع (لہ) جملہ لہ کے ایسی ہیں کہ

$$\text{مع} \text{ مع (لہ) زلہ} = \text{ہر (لہ) + مع مع (لہ) زلہ}$$

$$\text{تو صلح (لہ) زلہ} = \text{ہر (ص) - ہر (ط) + صلح مع (لہ) زلہ}$$

دفعہ ۳ سے یہ ظاہر ہے

مثلاً یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{مع (س) - لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ زلہ} = \frac{\text{لہ}^{\frac{1}{n}} (\text{س} - \text{لہ})^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\text{لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ مع (س) - لہ}^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

فرض کرو کہ مثبت مقدار ہی تو لہ (س - لہ) معدوم جب ہوتا کہ لہ = ۰ اور لہ = س
اسے معلوم ہوا کہ

$$\text{صلح مع (س) - لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ زلہ} = \frac{\text{لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ مع (س) - لہ}^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \text{مع (س) - لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ زلہ}$$

اسی کے مشابہ یہ مثال ہے تو کلی بالدرجہ سے

$$\text{مع لہ}^{\frac{1}{n}} (\text{لہ} - \text{لہ})^{\frac{1}{n}} \text{ زلہ} = \frac{\text{لہ}^{\frac{1}{n}} (\text{لہ} - \text{لہ})^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\text{لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ مع لہ}^{\frac{1}{n}} (\text{لہ} - \text{لہ})^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

اسے معلوم ہوا کہ مع لہ (لہ - لہ) زلہ = مع لہ (لہ - لہ) زلہ

پس اگر صحیح ہو تو ہم کلی کا استحالیہ یہہ کر سکتے ہیں کہ

$$\text{مع (لہ) - لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ زلہ} = \frac{\text{لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ مع (لہ) - لہ}^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \text{مع (لہ) - لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ زلہ}$$

$$\text{مع لہ}^{\frac{1}{n}} (\text{لہ} - \text{لہ})^{\frac{1}{n}} \text{ زلہ} = \frac{\text{لہ}^{\frac{1}{n}} (\text{لہ} - \text{لہ})^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\text{لہ}^{\frac{1}{n}} \text{ مع لہ}^{\frac{1}{n}} (\text{لہ} - \text{لہ})^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

(۳۴) علم مشقی جلون کی کلی کٹانی استحالیہ کی صورت قانونیہ سے آسان ہو جاتی ہی فرض کرو کہ
مع (لہ و حم لہ) کوئی جملہ جب لہ اور حم لہ کا ہو تو اگر ہم جب لہ = س کے رکھیں

مع مچ (جب لاوجم لا) زللا = مع مچ [ے دے (۱-ے)] زللا = زے
 = مع مچ ے دے (۱-ے) [ے دے (۱-ے)] زے ... (۱)
 مثلاً فرض کرو کہ مچ (جب لاوجم لا) = حے لا حتم لا تو
 مع حے لا حتم لا زللا = مع ے (۱-ے) ے (۱-ے) زے ... (۲)
 دفعہ ۳ کی چہٹی صورت قانونیہ من ط = ۱ اور ص = ۱ اور ن = ۲ اور ع = ۱ (ق-۱)
 کے رکھین تو یہ حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} & \text{مع ے}^۱ (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱) زے \\ & = \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} + \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} زے \\ & = \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} + \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} زے \\ & = \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} + \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} زے \\ & = \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} + \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} زے \\ & = \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} + \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} زے \\ & = \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} + \frac{ے (۱-ے) \frac{۱}{۱+۰} (ق-۱)}{۱+۰} زے \end{aligned}$$

اگر ہم م = ے + ۱ لکھ دے = جب لے کے رکھین تو اوپر کی مساواتوں میں سے یہ حاصل ہوگا
 مع جب لے حتم لا زللا = خے لا حتم لا ے (۱-ے) + ے (۱-ے) مع حے لا حتم لا ے (۱-ے) لا زللا

اور اس طرح سے اور پانچوں مساواتیں بھی بیان ہو سکتی ہیں
 (۳۵) یہ صورت اعظم ہے کہ

$$\begin{aligned} & \text{مع حے لا زللا} = - \text{مع زے لا حتم لا جب ے}^۱ \text{ لا زللا} \\ & = - \text{مع لا حتم لا}^۱ + (ن-۱) \text{مع حتم لا حتم لا}^۱ \text{ لا زللا} \end{aligned}$$

انتقال سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ن مع جب}^1 \text{ لازلہ} = \text{حم لاجب}^1 \text{ ل} + (\text{ن} - ۱) \text{ مع جب}^2 \text{ لازلہ}$$

$$\text{اسوٹے مع جب}^1 \text{ لازلہ} = \text{حم لاجب}^1 \text{ ل} + \frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}} \text{ مع جب}^2 \text{ لازلہ}$$

اخر مساوات سے یہ استنباط ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}} \text{ مع جب}^1 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}} \text{ مع جب}^2 \text{ لازلہ}$$

$$\text{اور علیٰ ہذا القیاس} \frac{\text{ن} - ۲}{\text{ن}} \text{ مع جب}^2 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۳}{\text{ن}} \text{ مع جب}^3 \text{ لازلہ}$$

پس اس طرح عمل کریں گے اگر ن جفت صحیح عدد ہو تو $\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}}$ مع زلہ پر نوبت پہنچے گی اور اگر ن طاق صحیح عدد ہو تو $\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}}$ مع جب لدر لدر پہنچے گا اور ایک ہی نوبت پہنچے گی اسے معلوم ہوا کہ اگر ن کو صحیح عدد $\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}}$ مع جب لازلہ = $\frac{(\text{ن} - ۱)(\text{ن} - ۲)(\text{ن} - ۳) \dots (۵ - \text{ن})}{۲ \dots (۴ - \text{ن})}$ کہ (ن جفت ہی)

$$\text{مع جب}^1 \text{ لازلہ} = \frac{(\text{ن} - ۱)(\text{ن} - ۲)(\text{ن} - ۳) \dots (۵ - \text{ن})}{۲ \dots (۴ - \text{ن})} \text{ کہ (ن جفت ہی)}$$

$$\text{مع جب}^2 \text{ لازلہ} = \frac{(\text{ن} - ۱)(\text{ن} - ۲)(\text{ن} - ۳) \dots (۵ - \text{ن})}{۳ \dots (۴ - \text{ن})} \text{ (ن طاق ہو)}$$

اگر جب ل کو حجم ل سے بدل دیں تو تحقیقات سے معلوم ہوگا کہ یہ دو نتیجے اس حالت میں قائم ہیں (۳۶) نتائج گذشتہ سے ہم ایک کلمہ عظیم استخراج کرتے ہیں اس کا نام دس کی صورت قانونیہ ہے

فرض کرو کہ ن جفت ہو تو

$$\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}} \text{ مع جب}^1 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}} \text{ مع جب}^2 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۲}{\text{ن}} \text{ مع جب}^3 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۳}{\text{ن}} \text{ مع جب}^4 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۴}{\text{ن}} \text{ مع جب}^5 \text{ لازلہ} = \dots$$

$$\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}} \text{ مع جب}^1 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۲}{\text{ن}} \text{ مع جب}^2 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۳}{\text{ن}} \text{ مع جب}^3 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۴}{\text{ن}} \text{ مع جب}^4 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۵}{\text{ن}} \text{ مع جب}^5 \text{ لازلہ} = \dots$$

اب یہ ظاہر ہے کہ $\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}}$ مع جب لازلہ $\frac{\text{ن} - ۲}{\text{ن}}$ مع جب لازلہ $\frac{\text{ن} - ۳}{\text{ن}}$ مع جب لازلہ $\frac{\text{ن} - ۴}{\text{ن}}$ مع جب لازلہ $\frac{\text{ن} - ۵}{\text{ن}}$ مع جب لازلہ اور

نسبت $\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}}$ مع جب لازلہ کے ہے کیونکہ ہر ایک جز ترکیبی اول کلی کا چھوٹا دوسری کلی

میں اپنی نظیر کے جز ترکیبی سے ہی اور سیری کلی اپنی نظیر کے جز ترکیبی سے بڑا ہے اور یہ ثابت ہے

$$\frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}} \text{ مع جب}^1 \text{ لازلہ} = \frac{\text{ن} - ۲}{\text{ن}} \text{ مع جب}^2 \text{ لازلہ}$$

مثبت
اسو
نہیں
۴۴
چھوٹا نسبت واحد کے اور بڑا نسبت ۱ کے ہے
اسے معلوم ہوا کہ نسبت (۱) کے بائیں طرف کے رکن کی دائیں طرف کی رکن کے ساتھ (۲) کی چھوٹی
نسبت واحد کے اور بڑی نسبت ۱ کے ہے

$$\begin{array}{r} \text{کے بڑا نسبت} \quad \dots \dots \dots ۶ \times ۶ \times ۴ \times ۴ \times ۲ \times ۲ \\ \hline (۱-۱)(۳-۱) \dots \dots \dots ۷ \times ۵ \times ۵ \times ۳ \times ۳ \times ۱ \\ \hline \text{اور چھوٹا نسبت} \quad \dots \dots \dots ۶ \times ۶ \times ۴ \times ۴ \times ۲ \times ۲ \\ \hline (۱-۱)(۲-۱) \dots \dots \dots ۷ \times ۵ \times ۵ \times ۳ \times ۳ \times ۱ \end{array}$$

امثلة

(۱) مع $(ط+لا)$ زلد = $لا(ط+لا) + مع(ط+لا)$ زلد
 $\frac{1+ن}{1+ن} = \frac{1+ن}{1+ن}$

(۲) مع $لا(ط-لا)$ زلد = $لا(ط-لا) - مع(ط-لا)$

(۳) مع $لا(ط-لا)$ زلد = $لا(ط-لا) - مع(ط-لا)$

(۴) مع $لا(ط-لا)$ زلد = $لا(ط-لا) - مع(ط-لا)$

(۵) مع $لا(ط-لا)$ زلد = $لا(ط-لا) - مع(ط-لا)$

(۶) مع $لا(ط-لا)$ زلد = $لا(ط-لا) - مع(ط-لا)$

(۷) مع $لا(ط-لا)$ زلد = $لا(ط-لا) - مع(ط-لا)$

(۸) مع $لا(لوگ لا)$ زلد = $لا(لوگ لا) - مع(لوگ لا)$

(۹) مع $لا(لوگ لا)$ زلد = $لا(لوگ لا) - مع(لوگ لا)$

(۱۰) مع $لا(لوگ لا)$ زلد = $لا(لوگ لا) - مع(لوگ لا)$

(۱۱) مع $لا(لوگ لا)$ زلد = $لا(لوگ لا) - مع(لوگ لا)$

(۱۲) مع $لا(لوگ لا)$ زلد = $لا(لوگ لا) - مع(لوگ لا)$

(۱۳) مع $لا(لوگ لا)$ زلد = $لا(لوگ لا) - مع(لوگ لا)$

(۱۴) مع $لا(لوگ لا)$ زلد = $لا(لوگ لا) - مع(لوگ لا)$

۴۷
 اصمین زلزلہ سے تعبیر کرتے ہیں اب مع $\frac{\text{زلزلہ}}{10+1} = \text{مستلاد سے معلوم ہوا کہ یہ حد غائی معلوم ہے}$

(۴۰) ہم طبع مع (ل) زلزلہ کی جب ان غیر متناہی یہ تعریف کیا کرتے ہیں کہ وہ حد غائی

ھم مع (ط) + ھم مع (ل) + ... + ھم مع (لن - ۱) کی ہے

اب فرض کرو کہ ۱ اور ب بڑے سے بڑی اور کم سے کم قیمتیں مع (ل) کی درمیان
 حدود غائی ط اور ص کے ہیں تو سلسلہ کم

(ھم + ھم + ... + ھم مع (ل) سے

اور بڑا (ھم + ھم + ... + ھم مع (ل) سے ہے

یعنی سلسلہ درمیان

(ص - ط) ۱ اور (ص - ط) ب

کے واقع ہوتا ہے اس واسطے حد غائی برابر (ص - ط) سے کہ ہو اس میں سے ایک مقدار

۱ اور ب کے درمیان ہے لیکن چونکہ مع (ل) پویشہ فرض کیا گیا ہے اس واسطے جب ل

کی قیمتوں کی ترتیب ط سے ص تک ہوتی ہے تو اس کی فوٹ بر قیمت پر درمیان ۱ اور

ب کے پویشگی اسلے لہ برابر سے کی ہوگا جبکہ ل کی قیمت درمیان ط اور ص کے ہو پس

مع = مع (ط) + بر (ص - ط) [اس میں بر کسر واجب ہے اور

ط مع مع (ل) زلزلہ = مع (ص - ط) مع (ط) + بر (ص - ط))

علیٰ ہذا القیاس اگر ھم (ل) کی ایک ہی علامت اس حالت میں ہو کہ ط اور ص کے درمیان لہ واقع ہو

تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ط مع مع (ل) ھم لہ زلزلہ = مع (ط) + بر (ص - ط) ط مع مع (ل) زلزلہ

(۴۱) مساوات ط مع مع (ل) زلزلہ - ط مع مع (ل) زلزلہ + ط مع مع (ل) زلزلہ ... (۱) کی صداقت بلا واسطہ ظاہر ہوگی اس واسطے کہ فرض کرو مع (ل) کلی مع (ل) کی ہو تو دیکھیں کہ یہ حاصل ہوگا

اور بائیں طرف یہ ہوگا ھم (ص) - ھم (ط)

ھم (س) - ھم (ط) + ھم (ص) - ھم (س)

اور اس طرح مساوات

طع مع (لا) زلہ = طع مع (لا) زلہ (۲)

بظاہر صحیح ہے ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ

طع مع (لا) زلہ = طع مع (ط - لا) زلہ (۳)

ط - لا = ط کے رکھو تو یہ حاصل ہوگا

مع مع (ط - لا) زلہ = مع مع (ط) زلہ

اسوٹے طع مع (ط - لا) زلہ = طع مع (ط) زلہ

= طع مع (ط) زلہ بموجب (۲) کے

البتہ طع مع (ط) زلہ = طع مع (لا) زلہ اوس نتیجے کے حاصل کرتے ہیں جس میں لایا

مختلف نہو خواہ رفر لک کو کام میں لاؤ یا رفر کے کو اس کی کسی بات کی پرواہ نہیں مساوات

(۱) سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

طع مع (لا) زلہ = طع مع (لا) زلہ + طع مع (لا) زلہ

دوسری صورت کلی بائیں طرف میں لا کو ۲ - لا سے بدلنے سے دریافت ہوگی کہ وہ برابر

طع مع (۲ - لا) زلہ یا طع مع (۲ - ط) زلہ

کے ہے اسے معلوم ہوگا کہ

طع مع (لا) زلہ = طع مع [مع (لا) + مع (۲ - ط) لا] زلہ

اسے معلوم ہوگا کہ اگر لا کی اون تمام قیمتوں کے واسطے جو اور ط کے درمیان میں

مع (لا) = مع (۲ - ط) لا تو یہ حاصل ہوگا کہ

طع مع (لا) زلہ = طع مع مع (لا) زلہ (۴)

اور اگر مع (۲ - ط) لا = مع (لا) تو یہ حاصل ہوگا کہ

طع مع مع (لا) زلہ = طع مع مع (لا) زلہ (۵)

مثلاً مع مع برزبر = طع مع جب برزبر . . . موافق (۴) کے

جلد ۲-۲ (۱-ط) کا متناہی رہتا ہی اس صورت میں ہم یہ لکھ سکتے ہیں کہ

مجموع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$ = بشرطیکہ ہم اسکو اختصار اس بیان کا سمجھیں کہ

مجموع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$ ہمیشہ متناہی رہتا ہی اگرچہ جو فی مقدار واحد کے ہو اور ط کو کافی قریب واحد کے

مقرر کر کے کلی کی قیمت کو جتنا درجہ ۲ سے کم کر سکتے ہیں

اب مجموع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$ تو قیمت اس کلی کی - لوگ (۱-ط) ہی اور یہ غیر محدود زیادہ ہوتا ہی

جب ط قریب واحد کے ہوتا ہی اسے معلوم ہوا کہ اس صورت میں ہم مجموع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$ = ۱۰۰ کے

لکھ سکتے ہیں بشرطیکہ ہم اسکو اختصار اس بیان کا سمجھیں کہ

مجموع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$ غیر محدود لا متناہی زیادہ ہوتا جاتا ہی جیسا کہ ط قریب واحد کے ہوتا جاتا ہے

اور ط کو کافی قریب واحد کی فرض کر کے کلی ہر مقدار معینہ سی بڑا سکتے ہیں

اب مع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$ پر خیال کرو یہاں کلی ۱-ط ہی اگر غیر اس کیفیت

لکھنے کی کہ جملہ جسکی کلی نکالتے ہیں غیر متناہی جب ہو جاتا ہی کہ $۱ = ۱$ ہو ہم کلی کی قیمت

حدود غائی ۱۰ اور ۲ کے درمیان دریافت کر نیکی لے کہیں تو ہم کو ۱-۱ یعنی ۲ حاصل ہوگا

مگر یہ ظاہر غلط معلوم ہوتا ہی اسواسطی کہ اس صورت میں ہر ایک رقم سلسلہ کی

جو جمع (۱-ط) سے تعبیر ہوتا ہی مثبت ہی اور اسلی حد غائی نہ ہو نہیں سکتی تحقیق

مجموع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$ اور مجموع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$ دو غیر متناہی ہیں اس مثال سے ثابت ہوتا ہی کہ کلی کا نکالنا

حدود غائی یعنی درمیان احوال میں کہ جملہ جسکی کلی نکالتے ہیں اور حدود کی درمیان

غیر متناہی ہو جا کے موافق قواعد معمولی کی نہیں ہو سکتا

(۱۴۴) دفعہ ۲ کی تحقیقات جیسے پرکار علم کی بنا قائم ہی یہ فرض کیا گیا ہی کہ قیمت ط مجموع $\frac{زائد}{(۱-ط)}$

اور حدود غائی ط اور ص اور مح (۱-ط) متناہی فرض کئے گئے ہیں لیکن اسمیں بڑی آسانی

ہوگی کہ ہم ایک حد غائی یا دو نو حدود غائی کو غیر متناہی فرض کریں اور یہ بات مثالوں

ظاہر ہو جائیگی

مع $\frac{ز}{ا+ل}$ پر خیال کرو کلی مس لہی اسی معلوم ہوگا کہ مع $\frac{ز}{ا+ل} = مس$ اور جتنا
 ط بڑا ہوتا ہو اتنا ہی مس ط قریب کہے کے ہوتا ہی اور ط کو کافی بڑا فرض کرنے سے ہم مس ط
 کو اور کہے کے تفاوت کو جتنا چاہیں چھوڑا مقرر کر سکتے ہیں اسے معلوم ہوگا کہ مع $\frac{ز}{ا+ل} = کہے$ اس
 اور کے بیان کا اختصار علیٰ ہذا القیاس مع $\frac{ز}{ا+ل} = لوگ$ (ا+ط) اور ط کو کافی
 بڑا فرض کرنے سے ہم لوگ (ط+ا) کو بڑا کسی مقدار معین کے کر سکتے ہیں اسے معلوم ہوگا کہ
 اختصاراً اسکا یہ بیان ہوگا کہ مع $\frac{ز}{ا+ل} = \infty$

(۴۵) فرض کرو کہ جملہ مع (ل) حدود غائی ط اور ص کے درمیان ایک
 دفعہ جب غیر متناہی ہوتا ہی کہ ل = س تو معمولی قواعد ط مع مع (ل) زلہ کے کلی نکالنے کے
 نہیں لگا سکتے مگر ہم ان قواعد کو کام میں لا سکتے ہیں کہ
 ط مع مع (ل) زلہ + س + مع مع (ل) زلہ

لب کی کوئی قیمت معینہ کیسی ہی چھوٹی کیوں نہ ہو حدود غائی اخر جملہ کی جب لب غیر محدود کم ہو
 اصلی قیمت کلی ط مع مع (ل) زلہ کی کہلاتی ہے اسکا یہ نام اصلی قیمت کا کاچی حسانی ہے

مثلاً فرض کرو کہ مع (ل) = $\frac{س}{ل}$
 تو ط مع $\frac{ز}{ل} = لوگ$ $\frac{س}{ل}$
 اور س + مع = س + مع $\frac{ز}{ل} = لوگ$ $\frac{س}{ل}$
 اسے معلوم ہوگا کہ اصلی قیمت لوگ $\frac{س}{ل}$ - لوگ $\frac{س}{ل}$ ہے یعنی
 لوگ $\frac{س}{ل}$ ہے

(۴۶) مع $\frac{ز}{(ط-ل)}$ کی قیمت جب $\frac{ل}{ط}$ ہی اسے معلوم ہوگا کہ
 ط مع $\frac{ز}{(ط-ل)} = جب$ (۱) - جب (۱-)

جیسا نتیجہ اور بیان ہو ہی ایسے نتیجہ میں جب (۱) اور جب (۱-۱) کی قیمت مقرر کرنے میں
 بعض اوقات طلبہ کو شک پڑ جاتا ہی فرض کرو کہ ل = ط حسب بر تو کلی مع زیر یعنی بر ہو جائیگی

تخلف

مست (مست بر) کی قیمت (م + ۱) کہ اوس حالت میں مقرر کریں کہ بر = کس

قیمت کلی کی حدود غائی معینہ کے درمیان کیے گئے ہیں

مندی طلبہ اکثر یہ غلطی کرتے ہیں کہ وہ بجای اسکے کہ دوسری قیمت کی زیادتی کو پہلی قیمت پر تقدیر کے

لین وہ دوسری قیمت کو ایسا ہی لیتے ہیں جیسے کہ پہلی قیمت کو اور اس طرح سی کلی مفروضہ صفر

نجاتی ہے اور یہ دفعہ ۴۲ کے برخلاف ہی یہاں فرض کرو کہ

تکمیل (ط - س) حم بر (زیر) مطلوب ہے

مع (ط - س) حم بر (زیر) = $\frac{ط - س}{ط + س - ۲طس حم بر}$ مع $\frac{۱}{ط}$

پس کلی مطلوب کے $\frac{ط - س}{ط} + \frac{ط - س}{ط + س - ۲طس حم بر}$ مع $\frac{۱}{ط}$

اب مع $\frac{ط + س - ۲طس حم بر}{ط}$

مع (ط - س) حم بر (زیر) = $\frac{ط + س - ۲طس حم بر}{ط}$ مست (ط + س) مست (ط - س) مست (ط - س)

جب یہ کلی حدود غائی معینہ کے درمیان لیجائی تو $\frac{ط - س}{ط}$ کے حاصل ہوگی اگر ط بڑا سے ہو

اور $\frac{ط - س}{ط}$ کے حاصل ہوگی اگر ط چھوٹا سے ہو

اسے معلوم ہوا کہ قیمت کلی مفروضہ کی کے ہو اگر ط بڑا سے ہو اور صفر ہی اگر ط چھوٹا سے ہو

(۴۷) علم حساب الکلیات سے بعض مسائل عظیم سلوک کے انفرج اور انضمام ہونے کے باب

بہت آسانی سے ثابت ہوتی ہیں

اگرچ (لا) متواتر اوس حالت میں کم ہوتا جا کہ لایسی قیمت ط سی آگے غیر قتنا ہی زیادہ ہوتا جا

تو سلسلہ غیر قتنا ہی مع (ط) + مع (ط + ۱) + مع (ط + ۲) + ...

اور کلی صحت مع لا زلہ دونو قتنا ہی ہیں مادونو قتنا ہی ہیں

اس واسطے کہ مع (لا) کے متواتر کم ہونے سے ط مع (لا) زلہ چھوٹا

ط مع (ط) زلہ سے اور ط ط مع (ط + ۱) زلہ سے ہے یعنی

غیر محدود لاک ساتھ زیادہ ہو اب یہ فرض کر لے کہ $\frac{1}{2}$ (لا) غیر محدود لاک ساتھ زیادہ ہوتا،
 اول فرض کرو کہ لاک ایک خاص قیمت ط سے لاک کے ساتھ غیر محدود جب زیادہ ہوتا ہے تو
 $\frac{1}{2}$ (لا) ہمیشہ چھوٹا نسبت $\frac{1}{2}$ کے رہتا ہی اس میں سے اور ع مقادیر متقل میں اور ع بڑا نسبت
 واحد کے ہی تو سلسلہ مفروضہ چھوٹا ایک خاص سلسلہ سے ہوگا جس کا انضمامی ہو نا
 دفعہ ۴ سے معلوم ہوا ہے اس واسطے سلسلہ مفروضہ انضمامی ہے
 اگر $\frac{1}{2}$ (لا) چھوٹا نسبت $\frac{1}{2}$ کے ہو تو لاک چھوٹا نسبت سے $\frac{1}{2}$ (لا) کے ہو اور لاک کا شمار
 کے لینے سے حکم دریافت ہوتا ہے کہ چھوٹا نسبت لوگ سے $\frac{1}{2}$ (لا) کے ہے
 آخر جملہ کی صورت بیانہ کی صورت $\frac{1}{2}$ ہوگی جب لا غیر متناسی کی ایسی صورت بیانہ کی قیمت دریافت
 کر کے جو قواعد معمولی میں ان کی موافق اور کا مساوی ل $\frac{1}{2}$ (لا) حاصل ہوگا
 اس واسطے اگر حد غائی $\frac{1}{2}$ (لا) کی جب لا غیر متناسی بڑی نسبت واحد کی ہو تو ہم
 ایک مقدار ع کی بڑی نسبت واحد کے ایسی دریافت کر سکتے ہیں کہ لا ہمیشہ چھوٹا نسبت
 سے $\frac{1}{2}$ (لا) کے ہو اسے معلوم ہوگا کہ سلسلہ انضمامی ہے
 اس طرح سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر حد غائی $\frac{1}{2}$ (لا) کی جب لا غیر متناسی ہو
 چھوٹا نسبت واحد کے ہو تو ہم ایک مقدار ع چھوٹا نسبت واحد کے ایسی دریافت کر سکتے ہیں
 کہ لا ہمیشہ بڑی نسبت سے $\frac{1}{2}$ (لا) کے ہو اسے معلوم ہوگا کہ سلسلہ مفروضہ انضمامی خاص سلسلہ
 انفرجی سے بڑا ہی اس واسطے خود وہ سلسلہ انفرجی ہی
 دوم پس اگر حد غائی $\frac{1}{2}$ (لا) کی جب لا غیر متناسی ہو بڑی یا چھوٹا نسبت واحد کے ہو
 تو خاصیت سلسلہ کی تشخیص ہو جاتی ہے لیکن اگر یہ حد غائی واحد ہو تو زیادہ اور تحقیقات
 کی ضرورت ہوتی ہے
 فرض کرو کہ جب لا غیر محدود ایک خاص قیمت ط سے زیادہ ہوتا ہے تو $\frac{1}{2}$ (لا) ہمیشہ چھوٹا
 نسبت $\frac{1}{2}$ کے ہوتا ہے اس میں سے اور ع مقادیر متقل میں اور ع بڑا نسبت

واحد ہوتا ہے تو سلسلہ مفروض چھوٹا ایک خاص سلسلہ ہے ہی جسکا انضمامی ہونا دفعہ

۴۸ سے معلوم ہوا، اس واسطے سلسلہ مفروض خود ہی انضمامی ہی اگرچہ (لا) چھوٹا نسبت

س (لا) کے ہو تو [کر (لا)] چھوٹا نسبت س (لا) کے ہو گا لوکار نمون کے

لینے سے ہکو معلوم ہوتا ہے کہ ع چھوٹا نسبت لوگ (لا) یعنی ع چھوٹا نسبت

لوگ س (لا) - کر (لا) کے ہے اور حد غائی اس سلسلہ کی جب لا غیر متناہی ہو ہی

جو حد غائی کر (لا) [لا (لا) - ۱] کی ہے اسے معلوم ہو گا کہ اگر حد غائی اس اخر صورت بیکہ

کی بڑی نسبت واحد کے ہو تو سلسلہ مفروض انضمامی ہو گا

اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر اخر صورت بیانہ کی حد غائی چھوٹی نسبت واحد کے ہو تو سلسلہ مفروض

انفراجی ہوتا ہی

سووم اگر حد غائی کر (لا) [لا (لا) - ۱] کی جب لا غیر متناہی ہو واحد کے تو اور

زیادہ تحقیقات کی ضرورت پڑتی ہے رقم عام سلسلہ مفروض کی لا (لا) [کر (لا)]

کے ساتھ مقابلہ ہو سکتی ہے

اس طرح عمل کرنے سے ہکو نتیجہ حاصل ہوتا ہی کہ فرض کرو

$E = \frac{L}{L} \text{ اور } E = L \text{ (لا) } (E - 1) = E = L \text{ (لا) } (E - 1)$

اور علی العموم $E = L \text{ (لا) } (E - 1)$ اور فرض کرو کہ ع ارقام

ع، و، ع، ... میں سے وہ اول رقم ہی جسکی حد غائی جب ہوتی ہی کہ لا غیر متناہی ہو

پس سلسلہ مفروضہ انضمامی ہے اگر حد غائی ع کی بڑی نسبت واحد کے ہو اور انفراجی ہے

اگر ع چھوٹی نسبت واحد کے ہو

ہم نے رقم عام سلسلہ کو (لا) سے تعبیر کیا ہے اگر اسکو ہر (لا) سے تعبیر کریں تو

ہر (لا) کو سچا (لا) کے نتیجہ بالامین رکھ سکتے ہیں اسے ہکو یہ معلوم ہوتا ہی کہ

ع = لا (لا) نقطہ الیسی ترسیم کی ضرورت تھی

(۵۰) اس نتیجہ کی ایک اور صورت یہی ہو سکتی ہے علم حساب الجبریات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ
 ہر (۱+ل) - ہر (ل) = ہر (ل+بر) آئیں بر بعض کے واسطے اسی معلوم ہوا کہ

$$\frac{\text{ہر (ل+بر)}}{\text{ہر (ل+ل)}} = \text{ل} - ۱ \left[\frac{\text{ہر (ل)}}{\text{ہر (ل+ل)}} \right]$$

اسوٹے حسب لہ غیر قناہی بوجہ غائی لہ ہر (ل) برابر غائی

$$\text{ل} - ۱ \left[\frac{\text{ہر (ل)}}{\text{ہر (ل+ل)}} \right] \text{ کے ہے پس ہم } \text{ل} = \left[\frac{\text{ہر (ل)}}{\text{ہر (ل+ل)}} - ۱ \right]$$

دفعہ ۴۹ کے نتیجہ میں رکھ سکتے ہیں

مسائل ۲۸ و ۲۹ و ۳۰ ڈی مورس صاحب علم حساب الجبریات و کلیات سے نقل کئے گئے ہیں

دفعہ ۴۸ کے مسئلہ کا اصولی اثبات جبر مقابلہ باب ۵۶ میں دیکھو

(۵۱) جمع لوگ جب لازلہ کو دریافت کرو

بوجب مساوات (۳) دفعہ ۴۱ کے

جمع لوگ جب لازلہ = جمع لوگ جب (کے - ل) زلہ = جمع لوگ ہم لازلہ
 اسے معلوم ہوا کہ کلی مطلوب کی جگہ رکے رکھنے سے

$$۲ = \text{جمع (لوگ جب ل+لوگ جم ل) زلہ}$$

$$= \text{جمع لوگ (حب ل+حم ل) زلہ}$$

$$= \text{جمع لوگ حب ۲ ل زلہ}$$

$$= \text{جمع [لوگ حب ل - لوگ ل] زلہ}$$

$$= \text{جمع لوگ جب ۲ لازلہ - ۱ کہ لوگ ۲}$$

۲ ل = ل کے رکھنے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جمع لوگ جب ۲ لازلہ} = \frac{۱}{۲} \text{ جمع لوگ جب ل زلہ}$$

$$= \text{جمع لوگ جب لازلہ بوجب مساوات (۴) دفعہ ۴۱ کے}$$

$$\text{اسوٹے } ۲ = ۲ - ۱ \text{ کہ لوگ ۲}$$

اسو اسطے $س = کچے لوگ$

اب پہر کبمع بر لوگ جب بر زبر = کبمع (کہ - بر) آ لوگ جب بر زبر موجب ساوات
(۳) دفعہ ۸۱ کے اسو اسطے

کبمع بر لوگ جب بر زبر = کچے کبمع لوگ جب بر زبر = کچے لوگ
بمع لوگ (۱+ل) زلا مطلوب ہے ل = س کے رکھو تو کلی کی یہ صورت ہوگی
کچے کبمع لوگ (۱+مس) زلا لیکن موجب ساوات (۳) دفعہ ۸۱ کے
کچے کبمع لوگ (۱+مس) زلا = کبمع لوگ [۱+مس (کچے - س)] زلا

اور ۱+مس (کچے - س) = ۱+ $\frac{۱-مس}{۱+مس}$

اسو اسطے ۲ کبمع لوگ (۱+مس) زلا = کچے لوگ ۲

اسو اسطے بمع لوگ (۱+ل) زلا = کچے لوگ ۲

(۵۲) مح (ط + ہ) کی صورت مفصلہ جو قواعد میں ہو او سیمین بعد ان + ان لوگ کے
جو باقی رہے وہ کلی محدود سے تعبیر ہو سکتی ہے اسو اسطے کہ فرض کرو

ح (ے) = مح (لا - ے) + ے مح (لا - ے) + $\frac{ے}{۲}$ مح (لا - ے) + ... + $\frac{ے}{۲^n}$ مح (لا - ے)

بلحاظ ے کے سرخز دیو تو

ح (ے) = $\frac{ے}{۲} - \frac{ے}{۲^{n+1}}$ مح (لا - ے)

دونو ارکان مساوات کی کلی حدود غائی اور ہ کے درمیان لو تو

ح (ہ) - ح (ے) = $\frac{ے}{۲} - \frac{ے}{۲^{n+1}}$ مح (لا - ے) + $\frac{ے}{۲}$ مح (ے - لا)

یعنی مح (لا - ہ) + ہ مح (لا - ہ) + $\frac{ے}{۲}$ مح (ے - لا) + ... + $\frac{ے}{۲^n}$ مح (ے - لا) + ہ مح (لا)

= $\frac{ے}{۲} - \frac{ے}{۲^{n+1}}$ مح (ے - لا) + ے

ط + ہ کو لا کی جگہ رکھو اور منتقل کرو تو

مح (ط + ہ) = مح (ط) + ہ مح (ط) + $\frac{ے}{۲}$ مح (ط) + ... + $\frac{ے}{۲^n}$ مح (ط)

$$+ \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$$

مح (ط + ہ) کی صورت مفصلہ میں جو موجب ٹیلر صاحب کے ضابطہ کے پہلائی جا کو سین او ن (ن + ا) رقموں کے مجموعہ پر زیادتی سچ (ط + ہ) کی اس کلی محدود سے تعبیر ہوتی ہے

۱۱۰۰ ص ۱۱۰۰

دفعہ ۴۴ کے اوّل نتیجہ کے کلی محدود کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$$

اسمیں مرکب و اجزاء

اور دفعہ ۴۰ کے نتیجہ دوم کے موافق اس کلی محدود کو اس صورت میں رکھ سکتے ہیں

۱۰۱ مع ۱ (ط + هـ - بره) مع ۱۰۲

یعنی $\frac{14+14}{14+14} = 1$ (ط + برہ)

اسلمین میرا ہی کسر داج ہے

(۵۳) برتھ کی کاسٹسلیہ کی بالذرا سے بکواسیم حاصل ہوتا ہے،

$$\text{مع } (n) = \text{مع } n - \text{مع } (n) \text{ مع } (n) \text{ مع } (n)$$
$$\text{مع للمح (ل) زل} = \frac{\text{لل}}{\text{ز}} \text{مح (ل) - مع } \frac{\text{لل}}{\text{ز}} \text{مح (ل) زل}$$
$$\text{مع } \frac{\frac{1}{f}}{g} = \frac{1}{\text{مع } g} \cdot \frac{1}{f}$$

سبح مع (لا) زل = لا مع (لا) - لا مع (لا) + لا مع (لا) ...

$$+ \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \log \frac{1-\alpha}{\alpha} + (1-\alpha) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \log \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

... $\frac{1}{(b)} \frac{1}{(b)} + \frac{1}{(b)} \frac{1}{(b)} - \frac{1}{(b)} \frac{1}{(b)} = 0$

$$+ \frac{(1-a)^{n-1} a^{n-1}}{a} + \frac{(1-a)^{n-2} a^{n-2}}{a^2} + \dots + \frac{(1-a)^1 a^1}{a^{n-1}} + \frac{(1-a)^0 a^0}{a^n}$$

یہ سلسلہ تاثرین طوفانِ رنوی کی کاسسکہ کہلاتا ہے بعض صورتوں میں یہ عمل شیعہ مرجع (لا) زلہ کی حاصل کر نہیں کام آتا ہے مثلاً اگر مرجع (لا) ایک جملہ جبریہ ناطقہ (ن-۱) درجہ کا تو مرجع (لا) مضمر ہے

مضامین اور ہندوئی واقع ہوسکائی کو منع لکھنؤ (۱۹۰۷ء) اور آغا خان کے فیصلے کے تحت

درافت موسساتی یا قضاة حکومتی و غیره (۵) در سطح ایالتی و مرکزی

طبع لا مح (لا) زلدکی ہستی ہو سکتی۔ ہستو اکل کر ہستے ہیں

(۵۴) ایک ہی جملہ پر مختلف طریقوں سے طے کرنے کے لئے

حساب الخزائنات کی دفعہ ۱۰۱ کی موافق یہ بات معلوم ہے کہ دو بے حساب اکاؤنٹس۔

اونکے اندر صرف مقدار مستقل میں فرق آسکتا ہی ہے۔ یہ معلوم ہو کہ جو بیشیہ نقل ہوئی ہے

وہ مطابق ہونگے یا انہیں شرق ہونگا تو ایک مقدار میں انہیں بھی مشغول

مع $(a+b)(a+b)$

کی کلی بالہ جرات تو یہ حاصل ہو گا کہ

$\frac{(طال + ص)}{ط} - مع (طال + ص) = \frac{ط}{ط}$ زله

يعني (ط لا + ط س) (ط لا + س) (ط لا + س س)

فرض کریں کہ $\frac{1}{2}$ تو $\frac{1}{2}$ کا کمر (اور جس طرح $\frac{1}{2}$ ہو جائیگا اور

اس سبب سے قیمت میں کمی

عملی بنانا

مع $(\text{ط} + \text{لا} + \text{ص})$ زلد مع $(\text{ط} + \text{لا} + \text{ص})$ زلد مع $(\text{ط} + \text{لا} + \text{ص})$ زلد مع $(\text{ط} + \text{لا} + \text{ص})$ زلد

اسے ہم بنیہ بنیہ نکالتے ہیں کہ

$$\frac{(\text{ط} + \text{لا} + \text{ص})}{\text{ط}} = \frac{[(\text{ط} + \text{لا}) + \text{ص}]}{(\text{ط} + \text{لا})}$$

اس طرح $(\text{ط} + \text{لا})$ میں ضرب دو اور پہلا = کے فرض کریں کہ مقدار مستقل کہ دریافت کرو
تو یہ مطابقت حاصل ہوگا

$$\text{ط} (\text{ط} + \text{لا}) (\text{ط} + \text{لا} + \text{ص}) + \text{ط} (\text{ط} + \text{لا}) (\text{ط} + \text{لا} + \text{ص})$$

$$= \text{ط} (\text{ط} + \text{لا}) (\text{ط} + \text{لا} + \text{ص}) + (\text{ط} - \text{ط}) (\text{ط} + \text{لا})$$

اگر ایک جملہ کی و دو غائی معینہ کے درمیان کلی نکالیں تو خواہ کسی طریقہ سے کلی نکالیں نتیجہ ایک ہی
حاصل ہوگا اور اس طرح ہم مختلف مطابقتی حاصل کریں گے

مثلاً مع $(\text{لا} - \text{لا})$ زلد میں ان مثبت صحیح ہی تو کلی بالآخر اسے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مع } (\text{لا} - \text{لا}) \text{ زلد} = \frac{\text{لا} + \text{لا}}{1 + \text{لا}} + \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}} = \frac{\text{لا} + \text{لا}}{1 + \text{لا}} + \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}}$$

$$\text{اس طرح مع } (\text{لا} - \text{لا}) \text{ زلد} = \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}} + \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}} = \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}} + \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}}$$

اس طرح عمل کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے

$$(1) \quad \frac{(\text{لا} - \text{لا}) (\text{لا} - \text{لا}) (\text{لا} - \text{لا})}{(1 + \text{لا}) (1 + \text{لا}) (1 + \text{لا})} = \dots$$

$$\text{پہر مع } (\text{لا} - \text{لا}) \text{ زلد} = \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}} + \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}} + \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}} = \dots$$

$$(2) \quad \frac{1}{1 + \text{لا}} + \frac{1}{1 + \text{لا}} + \frac{1}{1 + \text{لا}} = \dots$$

اسو اسطرح یہ صورتیں بائیں طرف (۱) اور (۲) کی برابر ہیں اگر ان مثبت صحیح ہو
(۵۵) مع $(\text{لا} - \text{لا})$ زلد سے ہم نے وہ جملہ تعبیر کیا ہے جس کا سرخ زردی مع $(\text{لا} - \text{لا})$

مختلف

بضایین

فرض کرو کہ یہ جملہ صحیح (لا) ہی تو اس ہم کو یہ مطلوب ہے کہ وہ جملہ دریافت کریں جس کا سبب
 صحیح (لا) ہی اس کو مع صحیح (لا) زلہ سے یعنی مع صحیح (لا) زلہ رلا سے تعبیر
 کرتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس شدہ کلی کی کلی کی کل + س، ہے اس میں سے مقدار
 مستقل ہی اور اس کی کلی

$$\frac{1}{s} \text{ کی کل} + s, \text{ لا} + s, \text{ م ہی}$$

اور کلی اس کی یہ ہے کہ

$$\frac{1}{s} \text{ کی کل} + s, \text{ لا} + s, \text{ م لا} + s, \text{ م}$$

اس میں سے ایک مقدار مستقل ہے اور سادگی اور آسانی کے لئے اس کو بے اگر خوشی ہو تو تعبیر
 پس اس طرح عمل کرنے سے یہ نتیجہ متواتر کی کلی نکالنے سے یہ حاصل ہو گا کہ

$$\frac{1}{s} \text{ کی کل} + s, \text{ لا} + s, \text{ لا} + s, \text{ لا} + s, \text{ لا} + s, \text{ لا} + s, \text{ لا} + s, \text{ لا}$$

اس میں لا، و لا، ... ان مقدار مستقل ہیں

یہ آسان بات ہے کہ کلی کردہ ارقام کلی مفرد میں بیان کریں اس واسطے کہ
 فرض کرو کہ ایک جملہ لا کا ہے تو فرض کرو

$$1 = \text{مع لا اور لا اور لا} = \text{مع لا اور لا اور لا} = \text{مع لا اور لا اور لا}$$

$$2 = \text{مع لا اور لا اور لا} = \text{مع لا اور لا اور لا} = \text{مع لا اور لا اور لا}$$

$$3 = \text{مع لا اور لا اور لا} = \text{مع لا اور لا اور لا} = \text{مع لا اور لا اور لا}$$

اس واسطے کلی بالا جزا کے لینے سے

$$3 = \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا} = \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا} = \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا}$$

$$= \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا} = \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا} = \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا}$$

صورت قانونیہ عام یہ ہے کہ

$$1 = \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا} = \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا} = \frac{1}{s} \text{ مع لا اور لا اور لا}$$

$$\dots + (-1)^n (1 - n) \dots + (-1)^{n-1} (1 + n) \dots + (-1)^{n-2} (2n - 1) \dots + (-1)^{n-1} n \dots + (-1)^n 1$$

ہمقر سے اس صورت قانونیہ کے تصدیق بآسانی ہونے لگتی ہے اسکو ہم طرفین کی سبب زوی نکالیں
تو صورت قانونیہ تشابہ حاصل ہوگی جن میں n کی جگہ $n-1$ ہوگا

امثلہ متفرق

$$(1) \text{ جمع } \frac{1}{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} \text{ (کہ } \frac{1}{14} \text{ (لہ) طاحت سر کے فرض کرو)}$$

$$(2) \text{ جمع } \frac{1}{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} \text{ (کہ } \frac{1}{14} \text{ (لہ) طاحت سر کے فرض کرو)}$$

$$(3) \text{ جمع } \frac{1}{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} \text{ (کہ } \frac{1}{14} \text{ (لہ) طاحت سر کے فرض کرو)}$$

$$(4) \text{ جمع } \frac{1}{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} \text{ (کہ } \frac{1}{14} \text{ (لہ) طاحت سر کے فرض کرو)}$$

$$(5) \text{ اگر } \text{جمع} (n) = \text{جمع} (n-1) \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$(6) \text{ ثابت کرو کہ } \text{جمع} (n) = \text{جمع} (n-1) \text{ (کہ } \frac{1}{14} \text{ (لہ) طاحت سر کے فرض کرو)}$$

$$(7) \text{ ثابت کرو کہ } \text{جمع} (n) = \text{جمع} (n-1) \text{ (کہ } \frac{1}{14} \text{ (لہ) طاحت سر کے فرض کرو)}$$

$$(8) \text{ ثابت کرو کہ } \text{جمع} (n) = \text{جمع} (n-1) \text{ (کہ } \frac{1}{14} \text{ (لہ) طاحت سر کے فرض کرو)}$$

$$(9) \text{ جب } n \text{ غیر متناہی ہو تو}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \dots$$

ماحصل $\frac{1}{n}$

$$(10) \text{ جب } n \text{ غیر متناہی ہو تو}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \dots$$

$$(11) \text{ جب } n \text{ غیر متناہی ہو تو حاصل } \frac{1}{n} \text{ کی دریافت کرو}$$

اصلی (در بیان کی، نگارم، و با کرم)

(۱۲) غائبہ گروہ کی فہرست

(۱۳) ثبات کرو کہ جمع جب لا ہوگا جب لا زلا = ہوگا ۔

(۴۵) اگر j (۱) مثبت اور محدود $b = b$ سے $b + s$ تک j تو بتاؤ کس طرح j نہی

$$\frac{1}{\sigma!} \left[\left(s \frac{1-\sigma}{\sigma} + b \right) c \cdots \left(\frac{s}{\sigma} + b \right) c(b) c \right]$$

کمی جب ان غیر متناہی ہو دریافت کریں اور ثابت کرو کہ حد عالمی چھٹی بہ نسبت
اس طرح (لد) از لکے ہوگی اور اس بات کو فرض کر لیا ہی کہ او سطرانسیہ تھادیہ نسبت کا جسکی

تعداد محدود ہے اور وہ آئیں ہیں برابر نہیں ہیں بڑا نسبت اور سطح ایک کے

اور یہ اسے ثابت کرو کہ شیخ نور اللہ چھوٹا نسبت اربعی زلہ اگر لو

مقدار مستقل لا = ز سے لا = ایک نہ ہو

(۱۵) قیمت کئی محدود کچھ لوگ (۱+ ن جم بر) زیر کی خواہ ن کی کچھ شے

قیمت ہو اس صورت قانونیت سے حاصل ہو سکتی ہے کہ

تجمع لوگ (۱+۱+۱+۱) = ۴ کوک [۱(۱+۱) ۱(۱+۱) ۱(۱+۱) ۱(۱+۱)]

آہیں متھاویرن وان، وان، وان، ... اس سوات میں مربوط ہیں کہ

$$\frac{n}{(1+n)^n} = 1+n$$

(۱۴) ثبات کرو کہ

$$\text{مع می}^{\text{ج}} \text{حم ط ل ز ل د} = \frac{\text{می}^{\text{ج}} \text{جم} (\text{ط ل د - س})}{(\text{ط ل د} + \text{س})} + \text{ایک مقدار مستقل}$$

اسیمن میں سر = سطح اسے ثابت ہوتا ہے کہ اگر کسی جسم کو لاکھوں مرتبہ کلی تھوڑا

لیکن تو یہ حاصل ہوگا

سوال ۱۰۰ (طالع - نوسر) س + س + ل + س + ل + ... س + ل

(۷۱) ثبات کرو کہ سلسلہ حشر کا یہ روزہ، رقم مالک سے اسے انفاقاً ہے

محکمہ

(۱۸) خابیکر کے سلسلہ جیکیں وین رقم ۶۵ (۱۸) ۱۰۰ ص ۱۰۰ ہے انصافی ہے

اگر بڑا بڑا ہو جائے اور انفرادی ہے اگر بڑا بڑا نہ ہو

(۱۹) ثابت کرو کہ سلسلہ جکی نونین رقم

$$(b_0 + \varepsilon) \cdots (b_r + \varepsilon)(b + \varepsilon)\varepsilon$$

$$(b_1 + 1) \cdots (b_r + 1)(b + 1)$$

ہی انضمامی ہے اگر ترقی پڑا بہ نسبت ع + ط کے ہو اور انفرادی ہی اگر ترقی پڑا ع + ط سے ہو

(۴) نوخذہ کی کہ سالہ کی (ن + ۱) وین رقم بن وین رقم سے نسبت

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\dots + \text{ن} - \text{ع} - \text{ا} + \text{ص} + \text{ن} - \text{ع} - \text{ا} + \dots$$

کی رہائی ہے انہیں غ ثابت صحیح عدد ہے اور ۱ اور ۲ ... ط و ص ...
 مقدار متساوی میں ثابت کرو کہ سلسلہ انضمامی ہے اگر ط بڑا نیست ۱ + اکے ہو اور
 انضمامی ہے اگر ط بڑا نیست ۱ + اکے نہ ہو

(۱۷) فرض کرو کہ ۱ = مع توازل اور ب = مع توازل اور س = مع توازل

اور فرض کرو کہ کلی کی حدود غائی تینوں کلیوں میں ایک ہی تو نہایت کرو کہ

اسی کہی جوتا اس سے نہیں ہوگا

اس کہی جوتا اس سے نہیں ہوگا
[ہر ایک کی ایک خاص مجموعہ کی حد غائی سمجھو تو یہ مثال موقوف اس سکہ جزیہ پر ہے]
(طام + طام + ... + طان) (س + س + ... + سان)

کے لیے (طاس + ظمسم + : + طنسن)

سے نہیں ہوتا

باب سوم

(۵۶) فرض کرو کہ مچ (لا) جملہ لا کا ہے تو ہم لکھ آئی ہیں کہ مچ (لا) کی کئی ایسی مالکی مقدار

لا کے لیجائی اور اسکے بالعکس ہی

(۵۸) ہم کو اس طرح ہی دریافت کر سکتے ہیں کہ اول لحاظ لاکے اور پھر لحاظ رکے کلی لین اس عمل کو اس مساوات سے تعبیر کرتے ہیں

$$لو = مع مع ح (لا دی) زی زلا$$

(۵۹) چونکہ دو ترکیبوں سے یو اس مساوات $مع = مع (لا دی)$ سے حاصل ہوتا ہے

اس لئے فرض دہی کہ ہم تحقیقات اس بات کی کریں کہ ایک نتیجہ سے زیادہ نتیجے تو نہیں حاصل ہوتے
فرض کرو کہ لو اور لوم دو قیمتیں ایسی ہیں کہ ہر ایک مساوات معلوم کی شرائط کو پورا کرتی ہی تو

$$\frac{زی}{زلا دی} = مع (لا دی) \text{ اور } \frac{زی}{زلا دی} = مع (لا دی)$$

تفریق کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{زی}{زلا دی} - \frac{زی}{زلا دی} = 0$$

$$\text{یعنی } \frac{زی}{زلا دی} = 0 \text{ اس میں } لو = لوم$$

اب مساوات $\frac{زی}{زلا دی} = 0$ سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ می ایک مقدار مستقل ہو یعنی

مقدار مستقل و ثابت ہو جائے کہ اس کو لا سے علاقہ ہو یا یوں کہو کہ می جملہ لا کا ہنو مگر

وہ کسی اور مقدار متغیر کا جملہ ہو سکتا ہے جو سوال میں واقع ہو پس مساوات

$$\frac{زی}{زلا دی} = 0 \text{ ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ } \frac{زی}{زلا دی} \text{ ایک جملہ لا کا نہیں ہو سکتا بلکہ وہ ایک}$$

جملہ اختیاری ہو گا ہو سکتا ہے پس اب ہم اس کو اس طرح لکھتے ہیں کہ

$$\frac{زی}{زلا دی} = ح (د)$$

کلی نکلنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$مو = مع ح (د) زی + مقدار مستقل$$

یہاں مقدار مستقل جسے ہم کہہ رہے ہیں اوس میں نہ ہونا چاہئے بلکہ اوس میں لا ہو گا اس کو

صر (لا) سے تعبیر کرتے ہیں اور مع ح (د) زی کو صر (د) سے تعبیر کرتے ہیں اس کا

(۶۲) دفعہ ۶۰ میں حاصل جمع کی حد غائی اس طرح بھی دریافت ہو سکتی تھی کہ اول تمام میں ایک نمودی سطر کی لیتے اور پھر تمام نمودی سطروں کا حساب لگاتے اس طریقت سے ملو گئے مجموعہ حاصل ہوتا کہ مستقیم ص ۱۰۰ (لادو) زلزہ = طبع ص ۱۰۰ (لادو) زلزہ ان دونوں صورتوں کی تطبیق دفعہ ۵۹ کی استعانت سے بیان ہو سکتی ہے جس کو اب بیان کرنا فرض کرو کہ ج (لادو) سے کلی ح (لادو) لجاو کے لادو مستقل خیال کر کے اوج (لادو) سے کلی ح (لادو) لجاو لادو کو مقدار مستقل خیال کر کے تعبیر کرتے ہیں تو طبع ص ۱۰۰ (لادو) زلزہ = طبع ص ۱۰۰ (لادو) ح (لادو) زلزہ = طبع ص ۱۰۰ (لادو) ح (لادو) زلزہ =

$$= ج (ص وسم) - ح (ط وسم) - ح (ص وسم) + ح (ط وسم) \dots (۱)$$

اب اول ج (لادو) کی کلی لجاو لادو کو مقدار مستقل مقرر کر کے لو اور حاصل کی کلی لجاو کے لادو مقدار مستقل مقرر کر کے لو اور جو نتیجہ آخر کو حاصل ہو اسے ج (لادو) سے تعبیر کرو تو یہ حاصل ہوگا

$$\text{طبع ص ۱۰۰ (لادو) زلزہ} = ج (ص وسم) - ح (ط وسم) + ج (ط وسم) \dots (۲)$$

لیکن موجب دفعہ ۵۹ کے ج (لادو) = ج (لادو) + ص (لادو) + ہر (لادو) اس میں ص (لادو) کوئی جملہ کا بغیر لادو اور ہر (لادو) جملہ لادو کا بغیر کے ہے اب (۳) کے استعمال بائیں طرف کارکن (۲) کا استعمال (۱) کی بائیں طرف کے رکن کی طرف ہو سکتا ہے (۶۳) اب ہم نے کلی سے لجاو لادو کے مستقل حدود غائی کے درمیان نکالی ہے لیکن اس دفعہ کلی لینے کے استعمال میں حدود غائی اول کلی کی اگر جملے اور تقادیر بتغیر کے ہوتے ہیں مثلاً رض طبع ص ۱۰۰ (لادو) زلزہ سے یہ اعمال تعبیر ہوتے ہیں کہ اول کلی لجاو کے لادو مستقل خیال کر کے لو اور فرض کرو کہ کلی ح (لادو) حاصل ہوئی اور پھر حدود غائی معین کے درمیان کلی کو تو یہ نتیجہ حاصل ہوگا ج [لادو ص (لادو)] - ج [لادو ہر (لادو)]

کلی فضا

تو آخر کار ہکو وہ کلی حاصل ہوگی جو

طرح [ح] [لا و صرح (لا)] - ح [لا و صرح (لا)] [لا و صرح (لا)]

سے فیبر سبکی

دفعہ ۶۰ میں جو ترکیب تجویح لکھی ہے اس میں صرف یہ فرق ہے کہ متعاقب
سہ وک، دھم، ۰۰۰ دم۔ ا کی یعنی ہر سطر افقی میں ایک نہیں ہوتا مثلاً
(مر + ا) وین سطر میں یعنی

[illegible]

حاصل ہوتا ہے
(۶۴) یہ کچھ ضرور نہیں کہ بطور افقی میں سے ہر ایک سطر افقی میں تعداد ارقام کی ایک ہی قدر رکھا
دلیل اسکی یہ ہے کہ م آخر کار غیر محدود زیادہ ہوتا ہے اسلئے (۱ +) دین سطر کی صدغائی
کی صورت بنیانیہ ایک ہی ہوتی ہی خواہ کسی تعداد ارقام سے ہم عمل شروع کریں
(۶۵) اول کلی میں جب حدود دغائی جملے اور تعداد تغیر کے ہوتی ہیں تو ہم کلیات مختلف ترتیب
مثل دفعہ ۶۲ کے بغیر خاص تحقیقات تشخیص حدود دغائی کے نہیں لے سکتے اس سلسلہ کو آئینہ
ماہ میں بیان کرتے

(۶۶) ہم نے جو تعریف کلی شہادۂ بیان کی ہے اسے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ دونوں ملکوں کی حدود عاقبت مستقل ہوں گے۔

مع مع مج (ل) صح (ر) زلز زز = مع صح (ل) زلز مع صح (ر) زز

ماحصل $\frac{1}{m}$ حت $\frac{1}{m}$ لزلہ

(۲) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۳) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۴) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۵) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۶) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۷) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۸) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۹) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۱۰) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۱۱) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

(۱۲) مع $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ $\frac{1}{m}$ لزلہ

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{4}{m}$$

ج سے ہین ہوگا

مثال ۲۱ باب پہلارم کے اخیر میں دیکھو

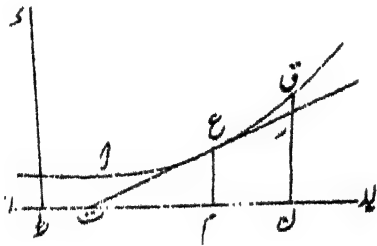
(۱۳) اگر صریح مع (ے) رے برابر وان کے ہی اور مع (ے) ہمیشہ مثبت ہی
 صریح مع (ے) حم سے (ے) + صریح مع (ے) حس سے (ے) چھٹا واحد کے ہے
 (۱۴) اگر صریح مع (ے) رے برابر واحد کے ہے اور مع (ے) ہمیشہ مثبت ہی تو ثابت کرو کہ
 صریح مع (ے) رے - (صریح مع (ے) رے) مثبت ہے

باب ششم

خطوط منحنی کے طول

مستوی قائم الزاویہ محمدین

(۶۸) فرض کرو کہ ایک نقطہ خط منحنی کے ق میں ہے اور لا اور د اس کے محمدین ہیں
 اور صریح طول تو س کے ق کا ہے اور اس کا انداز نقطہ معین کے سے کی طرف ہوتا ہے



تو بموجب دفعہ ۳۰ علم حساب الجبریات کے

$$\frac{\text{نصو}}{\text{زائد}} = ۱ + \left(\frac{\text{زائد}}{\text{زائد}} \right)$$

اسے معلوم ہوا کہ صریح مع = ۱ + $\left(\frac{\text{زائد}}{\text{زائد}} \right)$

مساوات خط منحنی سے ہم زائد کی قیمت ارقام لائیں دریافت کر کے اس میں مندرج کریں اور یہ
 کلی لائن تو معلوم ہو جائیگا

خطوط منحنی کا طول ۷۵
(۶۹) کسی خط منحنی کے طول دریافت کرنے کو استقامت اختیار کرتے ہیں کہ ان کے اوپر سے طویل دریا

یہ سب آلہ پیش ہو تا ہے کہ ایک خط مستقیم ایسا دریافت کرو جس کا طول برابر خط منحنی کے حصہ میں ہے جو
دفعہ گذشتہ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ طول قوس خط منحنی کا معلوم ہو جاتا ہے اگر ایک خاص کلی
معلوم ہو مگر یہ ہو سکتا ہے کہ بعض صورتیں ایسی واقع ہوں کہ ان میں یہ کلی نہ تشخیص ہو سکے جب طول
قوس خط منحنی کسی ایک یا دو نوسہ دیں طرف قوس میں بیان ہو سکے تو ہم کہا کرتے ہیں کہ خط منحنی
قابلیت استقامت کی رکھتا ہے

(۷۰) قریب البضوی کے قوس کے معلوم کرنے میں اوپر کی دفعہ کو کام میں لاؤ

ساوات قریب البضوی کی $s = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot n$ اسے معلوم ہو کہ

$$\frac{b}{a} = \frac{r}{R} \text{ اور } \frac{b}{a} = \frac{r}{R} \Rightarrow \left(\frac{b+a}{a} \right)^n = \frac{r}{R}$$

پس صو = مع $\frac{b+a}{a} \cdot n$ زلا مثال صفحہ ۸ دیکھو

$$= \sqrt{a^2 - b^2} \cdot n + ط لوک [a^2 + b^2] + ط لوک [a^2 + b^2] + ط لوک [a^2 + b^2]$$

یہاں میں کوئی مقدار مستقل ہے یعنی کوئی مقدار ایسی ہی کہ وہ لا یزید و لا یقوت نہیں ہے اس کی قیمت
موقوف اس نقطہ معین پر ہے جسے کہ قوس کا طول اندازہ ہوا، اگر ہم اس کے قوس کا طول اندازہ
کریں تو صومعدوم لہ کے ساتھ ہو جاتا ہے معلوم ہوا کہ اس کی دریافت کرنے کے واسطے یہ حاصل ہوتا ہے کہ
ط لوک $a^2 + b^2 = س$

$$پس صو = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot n + ط لوک [a^2 + b^2] + ط لوک [a^2 + b^2] - ط لوک [a^2 + b^2]$$

$$= \sqrt{a^2 - b^2} \cdot n + ط لوک [a^2 + b^2]$$

پس اگر طویل کسی خط منحنی کا اس سے نا پاک یا کئی نقطہ تک جس کا محدود معین ہو دریافت کرنا مطلوب ہو تو
لہ کی جگہ صرف محدود معینہ کو آخر صورت بیانہ میں رکھ دو مثلاً عرض مستقیم کے طرف پر لا = ط اسے
معلوم ہوا کہ طویل قوس کا اس اور عرض مستقیم کے ایک طرف کے درمیان
ط ہا ط + ط لوک (۱ + ط) ہے لہذا جہاں خطوط منحنی کے حصہ

(۷۱) دفعہ بالا میں ہم نے قیمت مقدار مستقل کی دریافت کی ہے لہذا جہاں خطوط منحنی کے حصہ

خطوط منحنی کا طول

طول دریافت کرنا بتو اپنی وہاں اس کی دریافت کرنے کی ضرورت نہیں اس واسطے کہ فرض کرو کہ طول قوس کا
اوس نقطہ سے جہاں محدود دلا ہے اوس نقطہ تک جس کا محدود دلا ہے دریافت کرنا منظور ہے

فرض کرو کہ صبح (لا) کلی $\{1 + (\frac{r}{R})\}$ کی ہے اور صوم اور صوم خط منحنی کے قوسوں کے
طول میں جو نقطہ معین کے اون نقاط تک جن کے محدود دلا اور لدام میں اندازہ کئے گئے ہیں
تو صوم - صوم طول مطلوب ہوگا پس

$$\text{صوم} = \{1 + (\frac{r}{R})\} \times \text{زلا} = \text{صبح (لا) + س}$$

اسے معلوم ہوگا کہ صوم = صبح (لام) + س اور صوم = صبح (لام) + س
اس واسطے صوم - صوم = صبح (لام) - صبح (لام)

اسے معلوم ہوگا کہ طول مطلوب کے دریافت کرنے واسطے لدام اور لدام کو متواتر لدا کی جگہ صبح (لام) میں
رہیں اور اول حاصل کو دوسری حاصل میں سے تفریق کریں اس واسطے مقدار مستقل کی دریافت
کرنے کی کچھ ضرورت نہیں نفس اللہ میں حاصل سطح لکھا جاسکتا ہے کہ

$$\text{صوم} - \text{صوم} = \text{لام} = \{1 + (\frac{r}{R})\} \times \text{زلا}$$

(۲) خط تدویر کے قوس کا طول دریافت کرو

خط تدویر میں اگر مسدود اس مواد مجرور کا ماس اوس نقطہ پر ہو تو بموجب دفعہ ۳۵۸ علم الجبر

$$\frac{\text{زلا}}{\text{صوم}} = \{1 + (\frac{r}{R})\}$$

$$\text{اس واسطے صوم} = \{1 + (\frac{r}{R})\} \times \text{س}$$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر قوس کی پیمائش راس سے کی جائے

بالعکس کے اگر صوم = $\{1 + (\frac{r}{R})\} \times \text{س}$ ہیں تو ایسی ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ خط منحنی خط تدویر کے

اور علی العموم اگر یہ ہو کہ

$$\text{صوم} = \{1 + (\frac{r}{R})\} \times \text{س}$$

اس میں اوب و س اور س مقدار مستقل ہیں تو ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ خط منحنی خط تدویر کے

اس واسطے کہ مبدا اور محوروں کے مناسب تبدلات سی اخر مساوات اس صورت میں کر سکتی ہیں کہ

$$\text{صو} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(۱۳) خط منحنی کے قوس کا طول دریافت کرو

مساوات خط منحنی کی $s = \frac{1}{2} (y^2 + x^2)$ اسے معلوم ہوا کہ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) \text{ اور } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2)$$

$$\text{پس صو} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) \text{ زلد} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) + \text{س}$$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر قوس صو کو نقطہ لہ سے پیمائش کریں

(۱۴) خط منحنی جسکی مساوات معلوم

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{b} + \frac{z}{c}$$

ہی اوسکی قوس دریافت کرو

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) \text{ اور } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) \text{ پس صو} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) + \frac{1}{2} (y^2 + x^2)$$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر قوس کی پیمائش نقطہ لہ سے کریں خط منحنی تدویر دیرے
دائرہ متحرک کا نصف قطر ایک چوتھائی دائرہ سا کہ نصف قطر سے ہے (علم حساب الجبریات)

کی دفعہ ۳۶۰ دیکھو اور $s = \frac{1}{2} (y^2 + x^2)$ کے رکھو

(۱۵) جس طرح نتیجہ دفعہ ۶۸ میں حاصل ہوا اوس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{صو} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) + \frac{1}{2} (y^2 + x^2)$$

یا ہم اس نتیجہ کو پہلے نتیجے سے اس طرح اخذ کریں کہ

$$\text{صو} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) + \frac{1}{2} (y^2 + x^2)$$

$$\text{صو} = \frac{1}{2} (y^2 + x^2) + \frac{1}{2} (y^2 + x^2)$$

مساوات خط منحنی سے ہم زلد کو ارقام میں بیان کر سکتے ہیں اور ہر کلمے سے صو کو

دریافت کر کے ہر جنصص صورتوں میں یہ صورت کافیہ نسبت دفعہ ۸ اس کے صورت میں درج ہے۔
 ستہ صورتیں تبدیل کر دیتی ہے

(۷۶) خط مخفی کو کا رتی کی قوس کا طول دریافت کرو

مساوات خط مخفی کی $ص = ط + ی = ص$ اگر $ط = ی$ کے فرض کریں تو $ص = ط + ی = ص$ لوگ
 اس واسطے $ز = ص$ اور $ز = ص$ $ص = ط + ی$

اور $ص = مع$ $ص = ط + ی$ $ز = مع$ $ص = ط + ی$ $مع$ $ص = ط + ی$
 دوسری کلی $ص = ط + ی$ ہی اوپر کی کلی

س لوگ $ص + ط = ط + ی$ بوجب دفعہ ۱۴ کے

اسے معلوم ہوا کہ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$
 (۷۷) اگر لہ اور ی میں ہر ایک جملہ تیسری مقدار متغیر ہو گا تو علم حساب الجبریات کی دفعہ ۲۰ سے

$ز = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$
 پس $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$

(۷۸) مساوات بھینوی کی $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$
 کے فرض کر سکتے ہیں پس ہر تہائی زاویہ خارج المکرز کی ہی (ہندسہ بالجبر کی دفعہ ۱۶۸ دیکھو)
 اس واسطے بوجب دفعہ سابق کے

$ز = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$

اور $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$
 بالکل ٹیک کلی نہیں حاصل ہو سکتی لہذا ہم (۱) $ص = ط + ی$ کو ایک سلسلہ میں پیدا کتے ہیں تو
 $ص = مع$ (۱) $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$ $ص = ط + ی$
 ہر ایک رقم کی جدا جدا کلی نکال سکتی ہیں رابعہ بھینوی کی طول دریافت کرنے کے واسطے ہم کلی حدود نکالیں
 اور کچھ کے درمیان لیں

خطوط منحنی کا طول

منحنی خطوط منحنی اور قطبی محدودین

(۹۰) فرض کرو کہ نق اور قطبی محدودین کسی نقطہ کے خط منحنی پر ہوں اور صو طول قوس کا ہو جو نقطہ محدودین سے اس نقطہ تک پیمائش کیا جاوے علم حساب التخریجات کی دفعہ ۱۱۳ کے موافق

$$\text{زبر} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{r'} \right) + \left(\frac{r}{r'} \right) \right]$$

$$\text{صو} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{r'} \right) + \left(\frac{r}{r'} \right) \right] \text{ زبر}$$

(۹۰) ارشید بس کے خط پیمان کی قوس دریافت کرو

$$\text{اس خط منحنی میں } r = \text{ط بریس } \frac{r}{r'} = \text{ط}$$

$$\text{اسے معلوم ہو گا کہ } r = \text{مع } \left(\frac{r}{r'} + 1 \right) \text{ زبر} = \text{مع } \left(\frac{r}{r'} + 1 \right) \text{ زبر}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{r'} + 1 \right) + \left(\frac{r}{r'} + 1 \right) \right] \text{ لوگ } \left[\left(\frac{r}{r'} + 1 \right) + 1 \right] + \text{س}$$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر قوس صو کو نقطہ بریس پہنچیں کریں یعنی اس نقطہ سے جسے بریس

(۹۱) منحنی منسوب بریس قوس کا طول دریافت کرو

مساوات اس خط منحنی کی نق = ط (۱ + جم بر) ہے پس

$$\text{صو} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{r'} + 1 \right) + \left(\frac{r}{r'} + 1 \right) \right] \text{ ط (۱ + جم بر)} = \text{زبر} = \text{مع } \left(\frac{r}{r'} + 1 \right) \text{ جم بر}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r}{r'} + 1 \right) + \left(\frac{r}{r'} + 1 \right) \right] \text{ ط (۱ + جم بر)} = \text{س}$$

مقدار مستقل صفر ہوگی اگر قوس صو کی نقطہ بریس سے پیمائش کریں یعنی اس نقطہ سے جہاں خط منحنی خط ابتدائی کو ترجہا کا ٹکڑا ہے

خط منحنی کے اس حصہ کا طول جو خط ابتدائی اور اس خط کے درمیان واقع ہوتا ہے کہ قطب کے گزرتا ہے اور خط ابتدائی پر زاویے قائمے بناتا ہے ط ط کہ ہے یعنی ط ط

(۹۲) فرض کرو طول مطلوب پورا احاطہ خط منسوب بریس کا ہی تو اول ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ

و اگر بریس جم کے زبر کے ہے مگر اسے قیو صفر حال ہوگا اور یہ خط معلوم ہوتا ہے کہ اسے

نصیب = $\frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R}$ ط = $\frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R}$ اور برابر ۲ ط حجم ہے کہ نہ ہوا چاہئے بلکہ \pm ط حجم ہے کہ نہ ہوا چاہئے اور ناسیب علامت اس صورت قانونیہ کی پرستعمال میں قرار ہو سکتی ہے اب ہم صومے ایک مثبت مقدار سمجھتی ہیں اور ہم صوم کو اس طرح پیمائش کر سکتے ہیں کہ وہ بر کے ساتھ زیادہ ہو پس نصیب بھی مثبت ہی اسے معلوم ہوا کہ جس حالت میں کہ ہم یہ ثابت ہے تو کو اوپر کی علامت لینی چاہئے اور نصیب = $\frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R}$ ط حجم ہے کہ لکنا چاہئے اور جس حالت میں کہ ہم یہ منفی ہو تو نیچے کی علامت لکھنی چاہئے اور نصیب = $\frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R}$ ط حجم ہے کہ لکنا چاہئے اسے معلوم ہوا کہ طول کل احاطہ کا مجموعہ ہم کہنے پر نہیں ہے بلکہ ط مجموعہ ہم ہے زبر - اگر مجموعہ ہم ہے زبر یعنی ۸ ط ہے نتیجہ اب اس جملے نکلنے کی پہلے ہی سے ہکو توقع تھی اس واسطے کہ شکل کے قرینہ سی یہ معلوم ہوا تھا کہ طول کل احاطہ کا مجموعہ اس حصہ سے تھا جو خط اتنا ہی کے ایک جانب میں واقع ہی اور اس طول کا ۸ ط ہونا دفعہ بالذکر ثابت ہو چکا ہے

(۸۳) بعض اوقات نہایت آسانی سی طول خط منحنی کا اس صورت قانونیہ سے مستنبط ہوتا ہے

$$\text{صوم} = \frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R} [1 + \frac{r}{R}] \text{ زو}$$

اور یہ دفعہ ۷۹ سے بلا واسطہ استخراج ہوتا ہے

(۸۴) لو کارٹی خط پیمان کا طول دریافت کرو مساوات اس خط منحنی کی ہے کہ نق = ص ط یا نق = ص ی اگر ہم ط = ی کے فرض کریں نق بر = ص نوک ص اس واسطے $\frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R}$ زو = ص اور

$$\text{صوم} = \frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R} [1 + \frac{r}{R}] \text{ زو} = \frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R} [1 + \frac{r}{R}] \text{ ی} + \text{ص}$$

پس خط منحنی کے حصوں کا طول جبکہ اطراف کے ی اور ی نصف قطر دائرہ میں ہے

یہی $\frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R} [1 + \frac{r}{R}] \text{ زو}$ یعنی $\frac{2\pi r}{2\pi r + 2\pi R} [1 + \frac{r}{R}] \text{ (ی - ی)}$ بر نصف قطر دائرہ اور اسکے مطابق جو ماس خط منحنی کے کسی نقطہ سے نکال دیا ان دو کو

در بیان کا زاویہ یک دم دفعہ ۳۰ علم حساب الجزئیات کے مستقل ہی اگر اس زاویہ کو سی تعبیر کریں یہی
حاصل ہوتا ہے کہ $\text{مس پس} = \frac{1}{2} (ا + پس) = \text{قطر سے اس واسطے زین} = \text{قطر اور صو} = \text{لی قطر سے ۴۵}$
اسے معلوم ہوا کہ $(ا - لی) = \text{قطر سے طول حصہ مذکور کا ہی}$

صور قانونیہ جنہیں کہ نصف قطر دائرہ اور غود ملحق ہیں

(۸۵) اگر خط منحنی کے کسی نقطہ کے نصف قطر دائرہ اور اس کے در بیان کا زاویہ سے ہو تو حجم سے $\frac{1}{2} (ا - لی) = \text{زین}$
(دفعہ ۳۰ علم حساب الجزئیات) فرض کرو کہ قطب سے جو اسی ماس پر غود نکلا جائی وہ ع ہو تو

$$ا جب سے = \frac{ع}{لی} \text{ اس واسطے حجم سے} = \frac{1}{2} (ا - لی) = \frac{ع}{لی}$$

$$\text{پس زین} = \frac{1}{2} (ا - لی) = \frac{ع}{لی}$$

$$\text{اس واسطے زین} = \frac{ع}{لی} = \frac{1}{2} (ا - لی) = \frac{ع}{لی} \text{ اور صو} = \frac{1}{2} (ا - لی) = \frac{ع}{لی}$$

(۸۶) تدویر مدیر خارجی

دفعہ ۳۰ علم حساب الجزئیات کے طریقہ کتابت اور شکل کو اختیار کریں تو یہ ثابت ہو سکتا ہے
ساواں ماس تدویر مدیر خارجی کا نقطہ ع پر یہ ہے کہ

$$د = ۵ = \frac{ح - بر - ح}{ح} = \frac{ط - ح}{ح} = \frac{ط - ح}{ح} = \frac{ط - ح}{ح} = \frac{ط - ح}{ح}$$

اسمیں لا اور د محدودین نقطہ ع اور لا اور د محدودین تغیر ہیں اسے معلوم ہوا کہ غود ع جو ماس
پر نقطہ ع سے نکلا جائے یہ ہے

$$ع = (ط + ص) ح = \frac{ط}{۲} ح$$

$$\text{اور زین} = (ط + ص) ح = \frac{ط}{۲} ح$$

$$\text{پس ع} = \frac{1}{2} (ط - ص) = \frac{1}{2} (ط - ص) = \frac{1}{2} (ط - ص) = \frac{1}{2} (ط - ص)$$

اسے معلوم ہوا کہ بوجہ دفعہ ۸۵ کے

$$\text{صو} = \frac{1}{2} (ط - ص) = \frac{1}{2} (ط - ص) = \frac{1}{2} (ط - ص) = \frac{1}{2} (ط - ص)$$

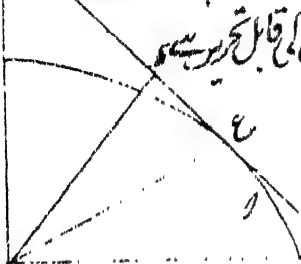
قرن پر لی = ط اور اس پر لی = مس پس طول حصہ خط منحنی کا قرن اور متصل کے راس کے درمیان ہے

خط منحنی کا طول

اگر سہ رابطہ سے جوہ اور کی علامت اور اگر سہ رابطہ سے جوہ کی علامت لینی چاہیے

صور قانونیہ جنہیں عمود اور اوس کا میلان داخل ہے

(۹۰) ایک اور ترکیب خط منحنی کی طول بیان کرنی کی قابل تحریر ہے



فرض کرو کہ خط منحنی میں ایک نقطہ 'ع' ہی اور 'ل' اور 'ک' اوس کے محدین ہیں اور جو طول تو س کا جو نقطہ معین 'ل' سے 'ع' تک پیمائش کی جائے ط کی عمود مبدی سے ماس پر کہ نقطہ 'ع' سے کھینچا جائے نکالو اور فرض کرو کہ ط کی 'ع' اور 'ک' = 'ل' اور 'ک' ط ل = 'بر' تو

$$ع = لاجم بر + ک ح بر$$

$$ل = لاجم بر - ک ح بر$$

$$\frac{ز}{ل} = - - م بر اور \frac{ز}{ل} = - - ق بر$$

اس واسطے

$$\frac{ز}{ل} = - - لاجم بر + ک ح بر + جم بر \frac{ز}{ل} + ح بر \frac{ز}{ل} = - - ل$$

$$\frac{ز}{ل} = - - \frac{ز}{ل} = - - لاجم بر - ک ح بر - ح بر \frac{ز}{ل} + جم بر \frac{ز}{ل}$$

$$= - - ع - - ق بر \frac{ز}{ل} = - - ع + \frac{ز}{ل}$$

اس واسطے کلی لینی ہے

$$\frac{ز}{ل} = - - مع ع ز بر + صو$$

$$اس واسطے صو = \frac{ز}{ل} + مع ع ز بر$$

اور اسکو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں کہ

$$صو + ل = مع ع ز بر$$

فرض کرو کہ صوم اور لوم قیمتیں صوم اور لوم کی اوس حالت میں ہیں کہ بر کی قیمت بر ہو اور صوم

اور دو قیمتیں صو اور لو کی اور صورت میں ہیں کہ بر کی قیمت بر ہو تو

$$\text{صو} - \text{صو} + \text{لو} - \text{لو} = \text{بر} \text{ مع } \text{ع} \text{ زبر}$$

ہم نے نوکا اندازہ اور ست میں کیا ہی حسین ع سی چکر لگتا ہے اور اس صورت میں وہ مثبت ہے

اور سیکہ کو منفی ہو تو اس سے یہ معلوم ہو گا کہ دوسری جانب میں ع کے ہے

نتیجہ مذکورہ بالا بہت مطلوبین میں کام آتے ہیں اور میں سے دو کو ہم لکھتے ہیں

(۱) طول حصہ خط منحنی کا جسکی مساوات معلوم ہو شخص کو

اوس مساوات اور $\frac{ز}{ع} = \text{م} - \text{بر}$ سے ہم لا اور د کو بر کی ارقام میں دریافت کرتی ہیں

اور اس واسطے جو برابر لا جم بر + د بر سے دریافت ہو جاتا ہے اوپر صو اس مساوات

سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{صو} = \frac{ز}{ع} + \text{مع} \text{ ع} \text{ زبر}$$

(۲) اوست ایک خط منحنی ایسا دریافت ہوتا ہے کہ جسکی قوس کی وساطت سی کلی

تعبیر ہو سکتی ہے اس واسطے کہ کلی مفروضہ مع ع زبر ہو حسین ع ایک جملہ بر کا ہی تو خط

منحنی مطلوب بر کے سا قاطع کرنے سے ان مساواتوں سے معلوم ہو سکتا ہے

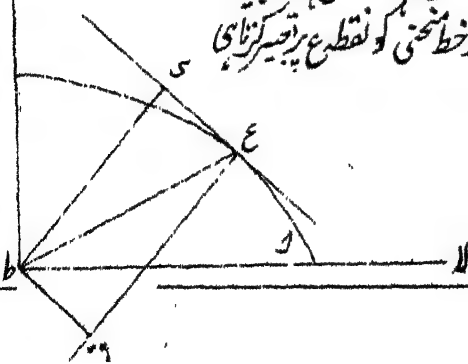
$$\text{لا} = \text{ع} \text{ جم} - \text{بر} - \frac{ز}{ع} \text{ جب بر اور د} = \text{ع} \text{ جب بر} + \frac{ز}{ع} \text{ جب بر}$$

$$\text{تو کلی اس طرح تعبیر ہو سکتی ہے کہ صو} - \frac{ز}{ع}$$

یہ دفعہ ہامی مر صاحب کے علم حساب الکلیات کی دفعہ ۱۳۶ کی نقل ہے

(۹۱) دفعہ گذشتہ کے نتائج اس طرح ہی حاصل ہو سکتے ہیں

فرض کرو کہ ق نصف قطر انحناء خط منحنی کو نقطہ ع پر تعبیر کرنا ہی



حکومتِ نفعی کا اصول
فرض کرو کہ ع ط = نق اور سو اور لو اور بر کے معنی موافق سابق کے ہوں ۸۶

تو علم حساب الجبرئیات کے موافق

$$ق = \frac{ز صو}{ز بر} اور ق = \frac{س}{ن} = \frac{ز بر}{ز ع} = \frac{نق}{ز صو}$$

$$اور نیز ع ح = ل ح ط ع د = - ل ح صو$$

$$اسو ط = \frac{ز ع}{ز بر} = - ع ح = - لو$$

فرض کرو کہ ع ش نصف قطر انحاء نقطہ ع پہ ط ق عمود ع ش پر نکالو تو مقام النقطة نقطہ ش کا نصف خط نختی ل ع کا ہی اور ق ش بلحاظ اس مقام النقطة کے ایسا ہے جیسا کہ ع ح بلحاظ مقام النقطة ع کے ہی فرض کرو کہ بر اور ع قطبی محدودین ق کے ہیں اور ق س = لو تو

$$بر = بر - کچ اور ع = لو$$

$$اور ق س = لو = - \frac{ز ع}{ز بر} = - \frac{ز ع}{ز بر} = - \frac{ز ع}{ز بر} = - \frac{ز ع}{ز بر}$$

$$اور نیز ق = ع ق + ق س = ع + لو = ع + \frac{ز ع}{ز بر}$$

$$لیکن ق = \frac{ز صو}{ز بر} اسو ط صو = \frac{ز ع}{ز بر} + ع ح ز بر$$

ع کی قیمت سی ایک آسان اثبات مسئلہ علم حساب الجبرئیات شد درجہ دفعہ ۳۴ کا دریافت کر سکتے ہیں فرض کرو کہ ع عمود نقطہ ط کے مقام النقطة ہے تو بموجب

دفعہ ۳۴ علم حساب الجبرئیات کے

$$\frac{1}{ع} \pm \frac{1}{ع} + \frac{1}{ع} = \left(\frac{ز ع}{ز بر} \right)$$

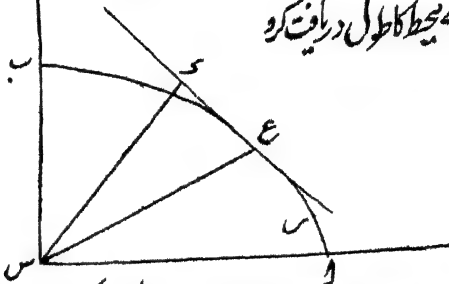
چونکہ ع نصف قطر دائرہ کا ہے تو

$$\frac{1}{ع} \pm \frac{1}{ع} + \frac{1}{ع} = \frac{1}{ع} + \frac{1}{ع} = \frac{2}{ع} = \frac{1}{\frac{ع}{2}}$$

$$اسو ط = ع = \frac{ع}{2}$$

ایک خاص حالت صورت قانونیہ

صوم - صوم + لوم - لوم = بر جمع ع زبر
 کے لکھنے کے قابل ہے فرض کرو کہ کل بیضی منحنی لین اور کوئی نقطہ اوس میں نقاط خصوصیت
 تو بر = بر + ر کہ اور لوم = لوم تو کل احاطہ خط منحنی کا
 (۹۲) بیضی کے محیط کا طول دریافت کرو



فرض کرو کہ اربع ربع بیضی ہو اور س عمود اوس ماس پر کہ ع سے نکال جا اور اس = ر = بر
 تو سندہ بالجبر کی دفعہ ۱۹۶ کے موافق س = ر = ط (۱-ی حب بر)

اس واسطے اربع + ع = ر = ط مع (۱-ی حب بر) زبر
 مقدار متقل جو کلی پر زیادہ ہونی چاہئے وہ ایسی فرض کی گئی ہے کہ کلی کے ساتھ معدوم ہو جا
 اگر سی نقطہ ایسا ہو کہ زاویہ خارج المکرز کے - بر ہو تو موجب دفعہ ۸ کے

بس = ط مع (۱-ی حب ر) زبر

پس اربع + ع = ر = بر (۱)

اور ع = ر = - $\frac{\text{ربع}}{\text{زبر}}$ = $\frac{\text{طی حب بر جم بر}}{(۱-ی حب بر)}$
 فرض کرو کہ ع کا محدود ہو تو موجب دفعہ ۹۰ کے

لہ = ع جم بر - $\frac{\text{ربع حب بر}}{\text{زبر}}$

= ط (۱-ی حب بر) جم بر + $\frac{\text{طی حب بر جم بر}}{(۱-ی حب بر)}$ = ط (اسی حب بر)

پس ع = ر = ی لہ حب بر اور اگر لہ محدود کا ہو تو
 لہ = ط جم (کے - بر) پس ع = ر = $\frac{\text{طی لہ لہ اور (۱) کو اس طرح لکھ کے ہیں}}$

بس - لہ = $\frac{\text{طی لہ لہ}}{\text{ط}}$ (۲)

یہ اس طرح سے ثابت ہو سکتا ہے جس طرح کہ اوپر کی دفعہ میں اسی تسلسل کا نتیجہ ثابت ہوا ہی بات وہ دفعہ
۱۰ کی صورت قانونیہ میں ضروری تبدلہ علامت کی جو شکل کی فرق سی پیدا ہوں کر دین یا اس
دفعہ کے موافق دوبارہ ابتدا سے شروع کریں مقدار مستقل جو کلی پر زیادہ ہونی چاہئے وہ
ایسی فرض کی گئی ہے جو بر کے ساتھ معدوم ہو

فرض کرو کہ بر کی جو سب سے بڑی قیمت ہو سکی وہ یہ ہے

$$\text{تو (دفعہ ۷) علم ہندسہ بالجبر کے موافق جم سے } = \frac{1}{2} (1 - 1)$$

جب ج غیر متناہی فاصلہ حرکت کری تو ج سے - لے کر وہ تفاوت ہو جاتا ہی جو متناہی الحاقات
اور قوس بعید البیضویہ متناہی اور یہ متناہی الحاقات میں کچھ جاتا ہی اور یہ قوس نقطہ ۱ سے
اندازہ ہوتی ہے پس یہ فرق

یعنی (۱-۱) حساب بر کے

طول خطوط منحنی کے سوال معلوم

(۹۴) ہنرے اوپر کے دفعات میں یہ بیان کیا ہی کہ خط منحنی معلوم کی قوس کا طول اس کی طرف
متغیر کے محدود کی رقموں میں دریافت ہوتا ہی اب ہم مختصر بیان اس کی بالکاس کرتے ہیں یعنی ایک
خط منحنی ایسا دریافت کرتی ہیں کہ قوس اس کی ایک جملہ معلوم اس کی طرف متغیر کی محدود کا ہو

فرض کرو کہ ج (۵) جملہ معلوم ہے پس صو = ج (۵)

$$\text{اس واسطے ج (۵) = } \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right]$$

$$\text{پس } \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{32} \right) \right]$$

$$\text{اور } 1 - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right]$$

(۹۵) اوپر کی ترکیب کی مثال یہ ہی کہ فرض کرو

$$\text{ج (۵) = } \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right] \text{ پس ج (۵) = } \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{32} \right) \right]$$

$$\text{س = } \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{32} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} & \text{مع} = \frac{\text{مع} \cdot \text{زلد}}{(\text{س} - \text{ل} - \text{ل})} + \frac{\text{مع} \cdot \text{زلد}}{(\text{س} - \text{ل} - \text{ل})} \\ & = \frac{\text{مع} \cdot \text{زلد}}{(\text{س} - \text{ل} - \text{ل})} + \frac{\text{مع} \cdot \text{زلد}}{(\text{س} - \text{ل} - \text{ل})} + \frac{\text{مع} \cdot \text{زلد}}{(\text{س} - \text{ل} - \text{ل})} \end{aligned}$$

اب دس کی جگہ کو کو لکھتے ہیں تو اسے معلوم ہوگا کہ خط منحنی خط تدویری (دفعہ ۳۱)

(۹۶) ایک اور مثال کی لئے فرض کرو کہ مع (ل) = ط لوگ لہ تو

$$\frac{\text{ط}}{\text{ل}} = (\text{ل})$$

$$\text{یہاں دس} = \text{مع} \cdot \frac{\text{ط}}{\text{ل}} = \text{زلد} \cdot \frac{(\text{ل} - \text{ط})}{\text{ل}} = \frac{\text{زلد} \cdot (\text{ل} - \text{ط})}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{مع} \cdot \text{ط} \cdot \text{زلد}}{(\text{ل} - \text{ط})} - \frac{\text{مع} \cdot \text{زلد}}{(\text{ل} - \text{ط})}$$

$$= \text{ط لوگ} + \frac{\text{ل}}{(\text{ل} - \text{ط})} + (\text{ل} - \text{ط}) + \text{س}$$

لے اور ذمی لے

(۹۷) خط منحنی کے طول تو س کو بغیر کلی نکالنے کے ہم اس صورت میں نکال سکتے ہیں کہ لے خط منحنی کی مساوات معلوم ہو۔ فرض کرو کہ صو ایک خط منحنی کی قوس کا طول ہے اور ق نصف قطر

انحصار اس نقطہ پلے کا ہے جو موافق طرف شغیر صو کے ہے تو علم حساب الجبریات کی دفعہ ۳۳

کے موافق صو ± ق = ل اسمین ل مقدار مستقل ہے اگر مساوات لے کی معلوم ہو تو ق نقطہ

لے کے محد دین کی رقموں میں معلوم ہو سکتا ہے اور یہ یہ محد دین ذی لے کی نقطہ متناظر محد دین کی رقموں

میں بیان ہو سکتا ہے تو صو معلوم ہو جائیگا فرض یہ ترکیب اعمال جزی لینے کے اور استحالیہ جزی کا کلی لینے کے ہو جائیگا

(۹۸) قریب البیضوی پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

قریب البیضوی کی مساوات د = ۴ ط ل ہے اس کا لے مقرر کرو فرض کرو کہ لہ اور د

محد دین اس نقطہ لے کے ہیں جو مطابق قریب البیضوی کے نقطہ (لہ د) کے ہے تو

علم حساب الجبریات کی دفعہ ۳۳ کی معمولی ترکیبوں کے موافق ہم برہاصل ہوتا ہے

$$\text{لہ} = ۲ ط + ۳ لہ \quad \text{د} = \frac{۲}{۳} ط$$

$$\text{اور ق} = ۲ ط \left(\frac{\text{ط} + \text{لہ}}{\text{ط}} \right)$$

تو مساوات لفت کی یہ حاصل ہوگی

$$۲۴ ط ۲ = ۴ (لا - ط ۲)$$

$$اور ق = ط ۲ \left(\frac{لا + ط ۲}{۴} \right)$$

$$ص ۲ = ط ۲ \left(\frac{لا + ط ۲}{۴} \right) = ل$$

فرض کرو کہ ہم ص ۲ کو اوس نقطہ سے پیمائش کریں جیسے لا = ط ۲ یعنی اوس نقطہ سے جو مطابق ل

قریب البیضوی کے ہے تو ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا کے ساتھ کم از کم زیادہ ہوتا ہی اسلئے ہیکو اخر مساوات

میں اوپری علامت لینی چاہئے اور لا = ط ۲ اور ص ۲ = ۰ کے فرض کرنے سے ل = - ط ۲ کے حاصل ہوتے ہیں

$$ص ۲ = ص ۲ - ط ۲ \left(\frac{لا + ط ۲}{۴} \right)$$

یہ قیمت ص ۲ کی لینے کے قواعد معمولی سے حاصل ہوتی ہے

(۹۹) خط منحنی کی قوس کا طول جب اوپری طرف تنغیر کی محدودین کے رقوم میں معلوم ہوتا ہے

تو مساوات لفت کی اسقاط کے اعمال معمولی سے دریافت ہو سکتی ہے

اس واسطے کہ موجب دفعہ ۳۳۴ علم حساب الخزینیات کے

$$لا - لا = لا \pm \frac{1}{2} \frac{ز لا}{ز لا}$$

اس میں حروف خیر زربین لگی ہوئی ہیں کسی خط منحنی کے نقطہ سے متعلق ہیں اور جہ حروف زربین

نہیں لگی ہوئی ہیں وہ لفت کے نقطہ تناظر سے متعلق ہیں

$$لا = لا \mp ق \frac{ز لا}{ز لا} \dots (۱)$$

$$اور علی ہذا التیاز = لا \mp ق \frac{ز لا}{ز لا} \dots (۲)$$

بس اگر ص ۲ ارقام لایا کر میں یا دونوں میں معلوم ہو تو اس ارتباط اور خط منحنی کی مساوات کی

ز لا اور ز لا کو دریافت کر سکتے ہیں اور ق مساوات ص ۲ = ق = ل سے معلوم ہوتا ہے

پس اب یہ باقی رہا کہ لا اور لا کو مساوات (۱) اور (۲) سے اور خط منحنی کی مساوات

معلوم سے ساقط کریں اس طرح سے ایک مساوات لا اور لا کے ز لا پر معلوم ہو جائیگی اور

یہی مساوات مطلوب لفت کی ہوگی

(۱۰) خط مجمل بر اوپر کی دفعہ کا عمل کرو

مساوات مجمل کی ہے کہ

$$د = س (س + س)$$

$$\text{اور صو} = س (س - س)$$

فرض کرو کہ صو اس نقطہ سے پیمائش ہوتا ہے کہ جہاں $لا = ۰$ اور $د = س$ اس مساوات خط مجمل کی لفٹ کی جو اس نقطہ سے شروع ہوتا ہے جسکی خصوصیت ایسی ہے بیان کی ہے دریافت کرتے ہیں

اب ہم یہ حاصل ہے کہ

$$\frac{د}{س} = \frac{صو}{س}$$

$$\frac{د}{س} = \frac{صو}{س}$$

پس

اور ق = صو مقدار مستقل کی کچھ ضرورت نہیں کیونکہ موجب فرض ق معدوم صو کے ساتھ ہوتا ہے اسے معلوم ہوا کہ دفعہ گذشتہ کی مساواتین (۱) اور (۲) کی یہ ہوجائیگی

$$لا = د - صو$$

$$د = د - صو = د - صو$$

$$\text{اور صو} = د - لا = د - (د - صو) = صو$$

$$\text{اس واسطے} \quad \frac{صو}{س} = \frac{د - لا}{س}$$

$$\text{پس} \quad لا = د - لا = د - (د - صو) = صو$$

اب لا اور د کی ان قیمتوں کی خط مجمل کی مساوات میں رکھو اور تباہا مطلوب لا اور د کے درمیان دریافت کرو اس طرح سے اندراج قیمت آسانی سے ہو سکتا ہے کہ

$$د = س (س + س)$$

$$\text{اس واسطے} \quad \frac{د}{س} = \frac{س + س}{س}$$

$$\text{اس واسطے } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\text{س} - \text{س}) = \text{س} \text{ ہی ہے}$$

$$\text{اس واسطے } \frac{1}{2} = \text{س تو ک} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\text{س} - \text{س})$$

$$\text{پس آخر کو } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\text{س} - \text{س}) = \text{س تو ک} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\text{س} - \text{س})$$

بسب علامت جذر کے لے کی دو قیمتیں موافق کے ہر ایک قیمت کی ہیں جو س کے چھوٹی اور بڑی قیمتیں تعداد آ پسیں برابر ہیں مگر علامت میں مختلف ہیں آئیں ایک نثر اور اس نقطہ پر جس پر

ل = ۰ اور ۵ = س اور محور ل کا متعلق الماقات ہی

(۱۰۱) اس طرح مساوات قطبیہ ہی کام میں آ سکتی ہیں جب ذی لفت کی قوس کا طول معلوم ہو اور لفت کو اس کی طرف متغیر کی محدثین قطبیہ کے ارقام میں تخصیص کرنا منظور ہو جو ب علم حساب الخ

کے دفعہ ۳۳ کے

$$\text{نق}^۱ = \text{ق}^۱ + \text{ل}^۱ - ۲ \text{ ق}^۱ \text{ ع} \dots \dots (۱)$$

یہاں موافق سابق کے حروف جزیر زیرین لگی ہوئے نہیں خط منحنی معلوم یعنی ذی لفت سے متعلق ہیں اور حروف جزیر زیرین نہیں لگی ہوئی ہیں وہ لفت مطلوب کے متعلق ہیں چونکہ لفت معلوم ہو گیا ہے اسلئے ع اور ق میں ارتباط معلوم ہے اور صو = ق = ل پس اگر صو ارقام ع اور ل میں بیان ہوتا ہو تو ہم ع اور ل کو (۱) اور (۲) اور مساوات معلوم کی استعانت ہی ساقا کر سکتے ہیں اس طرح سے مساوات ع اور ق کے ربط والی معلوم ہو جائیگی اور اس سے لفت تشخیص ہو جائیگا

$$(۱۰۲) \text{مساوی الزوا یا خط پچان پر دفعہ بالا کا عمل کرو}$$

خط منحنی ع = ل جب سہ میں سہ مستقل زاویہ خط پچان کا ہی اب اگر ہم لفت کا آغاز قطب خط پچان کے بائیں اور اس نقطہ کے صو کو پیمائش کریں تو ق = صو = ل خط کے بموجب دفعہ ۴۸ کے حاصل ہوگا پس دفعہ گذشتہ میں (۱) کے پیرہن ہو جائیگا

$$\text{ل}^۱ = \text{ق}^۱ + \text{ق}^۱ \text{ کسہ} + \text{ل}^۱ - ۲ \text{ ق}^۱ \text{ ع} \text{ کسہ}$$

= نقی قسطا سے + نقی جب سے + ع - نقی ع قسطا سے موجب (۲) کے

اس مساوات درجہ دوم ع سے ہکو بیہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ع - نقی قسطا سے = \pm نقی جم سے$$

اب اگر ہم اوپر کی علامت لیں تو ع = نقی (۱ + جم سے) دریافت ہوگا اور (۲) سے

$$نقی = \frac{ع + جم سے}{جم سے} نقی دریافت ہوگا مگر اس حل کو ترک کر دینا چاہئے$$

کیونکہ اس سے ہکو بیہ دریافت ہوتا ہے کہ ق یعنی

$$نقی ذیع = \frac{ع + جم سے}{جم سے} نقی اور یہ مساوات ق = نقی قسطا سے سے تطبیق نہیں$$

اب اگر نیچے کی علامت لیں تو بیہ دریافت ہوگا کہ ع = نقی جب سے اور (۲) سے

$$ہکو بیہ دریافت ہوتا ہے کہ نقی = \frac{ع + جم سے}{جم سے} پس ع = نقی جب سے$$

اسے معلوم ہوا کہ ایک مساوی الزوا یا خط لگانا ہے اور اوپر میں زاویہ متعلق ہے جو ذی

خط منحنی کی مساوات ذاتی

(۱۰۳) فرض کرو کہ خط منحنی کی قوس کا طول کسی نقطہ معین سے پیمائش کیا جائے اور ایک ماس اس کی

طرف متغیر سے کچا جای اور دوسرا ماس کسی اور نقطہ معین خط منحنی سے کچا جای ان دونوں

ماسوں کے میلان جس زاویہ پر ہو اسے سر سے تعبیر کرو تو مساوات جسے ارتباط اصول

کے درمیان قائم ہو مساوات ذاتی خط منحنی کی کہلاتی ہے علی العموم بعض تحقیقات کے

اندر اور علی الخصوص لٹ اور ذی لٹ کی تحقیقات کے اندر یہ ترکیب خط منحنی کی تشخیص

نہایت سادی اور آسان نسبت اس معمولی ترکیب کے ہی جمین قائم الزاویہ محزوں کی طرف

رجوع کرنی پڑتی ہیں یہ محور خارجی خط ہوتی ہیں

(۱۰۴) اول ہم بتلاتی ہیں کہ خط منحنی کی دلت معمولی سے کس طرح مساوات ذاتی خط منحنی کی

حاصل ہوتی ہے

فرض کرو کہ $د = ع$ (لا) مساوات خط منحنی کی ہے جبکہ خط منحنی پر ہے اور محور کا ماس اس

نقطہ پر مساوات معلوم سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ز}{ل} = \frac{ح}{ل} = (ل) = \frac{مس}{مس} \text{ موجب فرض کے}$$

مس لہذا رقام مس سر میں معلوم ہو گیا لہذا = ح (مس سر) کے لکھو تو

$$\frac{ز}{ل} = \frac{ح}{مس} \text{ (مس سر) قطا سر}$$

$$\text{اور نیز } \frac{ز}{ل} = \frac{ص}{ح} = \text{حم سر}$$

$$\text{اس واسطے } \frac{ز}{ل} = \frac{ح}{مس} \text{ (مس سر) قطا سر م سر}$$

اس مساوات سے صو رقام سر میں کلی لینے سے دریافت ہو سکتا ہی ایک متشابہ

نتیجہ حاصل ہوتا اگر سید پر محور لہ کا منطبق ایک ماس پر ہوتا

(۱۰۵) خط تدویر پر اوپر کی دفعہ کا عمل کرو

دفعہ ۳۵۸ علم حساب الخریات سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{ز}{ل} = \frac{ح}{ل} = \left(\frac{ل - ط}{ل} \right) = \frac{ا}{مس}$$

$$\text{اس واسطے } \frac{ط}{ل} = \frac{ا}{ح} \text{ سر اور لہ } = ط ح سر$$

$$\frac{ز}{ل} = \frac{ط}{ح} = \text{ط ح سر م سر}$$

$$\frac{ز}{ل} = \frac{ح}{مس} = \frac{ط}{ح} = \text{ط ح سر م سر}$$

$$\text{اس واسطے } صو = ط ح سر + س$$

مقدار متقل صفر ہوگی اگر ہم صو کو نقطہ معین سے جسے اول ماس کچا گیا ہی پیمائش کریں

یعنی خط منحنی کی راس سے

(۱۰۹) مساوات ذاتی معلوم ہے اسے خط منحنی کی معمولی مساوات استنباط کرو

$$\frac{ز}{ل} = \frac{ح}{مس} \text{ جب سر}$$

$$\text{اس واسطے } ل = \frac{ح}{ص} = \text{مع ز صو جب سر}$$

$$\text{علیٰ ذلہ القیاس } ح = \text{مع ز صو م سر}$$

اب صوموعہ فرنیس کے ارقام سر من معلوم ہے تو کلی لینے سے ہم لا اور کہ ارقام سر میں دریافت کر سکتے ہیں اور سر کو سا قط کر کے ہم معمولی مساوات خط منحنی کی لا اور میں دریافت کر سکتے ہیں

(۱۰۷) خط تدویر پر دفعہ گذشتہ کا عمل کرو

یہاں صو = ۴ ط جب سر

پس لا = مع ز صوح سر = ۴ ط مع حصہ سر جم سر سر = سی - ط جم ۲ سر

۵ = مع ز صوح سر = ۴ ط مع جم سر سر = سی + ۲ ط سر + جب

اسے معلوم ہوا کہ سر کی سا قط کرنے سے ہم معمولی مساوات حاصل ہوگی اگر قائم الزاویہ محوروں کا مبداء اس خط منحنی کا ہو تو یہ حاصل ہوگا کہ سی = ط اور سی = ۰

(۱۰۸) اب اشد تفرقہ معادلات ذاتی کی لکھتے ہیں

مساوات ذاتی دائرہ بظاہر صو = ط سر کے معلوم ہوتی ہے

(۱۰۹) مساوات خط مجمل کی

$$س + سی = سی (سی + سی)$$

مبداء خط منحنی پر ہے اسے معلوم ہوا کہ

$$\frac{ز}{ر} = \frac{۱}{۲} (سی - سی) (سی - سی) اور صو = سی (سی - سی)$$

پس اگر سروہ زاویہ ہو جو کسی نقطہ کا ماس مبداء کے ماس پر بناتا ہے تو

$$صو = سی سی سر$$

(۱۱۰) ہم نے دفعہ ۸۶ میں دیکھا ہے کہ

$$\frac{ز}{ر} = \frac{جم سر - جم سر}{جم سر + جم سر} = \frac{جم سر - جم سر}{جم سر + جم سر}$$

$$تو سر = \frac{جم سر + جم سر}{جم سر}$$

اسی دفعہ کے موافق

$$\text{صو} = \frac{1}{4} (\text{س} - \text{ط}) \left(\frac{\text{س} - \text{ط}}{2} \right) + \text{س}$$

$$= \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ط}) \text{جم} \frac{\text{ط}}{2} + \text{س}$$

$$= \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ط}) \left(\frac{\text{س} - \text{ط}}{2} \right) + \text{س}$$

اگر ہم صو کو اس نقطہ سے ناپیں جہاں بر = ۰ تو

$$\text{صو} = \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ط}) \left(\frac{\text{س} - \text{ط}}{2} \right) + \text{س}$$

ہم اس نتیجہ کو اس طرح سادہ بنا سکتے ہیں کہ

$$\text{سر} = \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ط}) + \text{سر اور صو} = \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ط}) + \text{صو کہیں}$$

اسکے بیٹھنی ہیں کہ قوس کو بجای راس سے ناپنے کے قرن سے ناپیں پس

$$\text{صو} = \frac{1}{4} (\text{س} + \text{ط}) \text{جب } \frac{\text{ط}}{2} + \text{سر}$$

اسمین زیر و ن کو اڑا سکتے ہیں

(۱۱۱) مساوات خط تدویر دیر داخلی کو یہی اس طرح لکھتے ہیں کہ

$$\text{صو} = \frac{1}{4} (\text{س} - \text{ط}) \text{جب } \frac{\text{ط}}{2} - \text{سر}$$

(۱۱۲) اخرو دو قوس کے ظاہر ہوتا ہی کہ جب چھوٹا واحد سے ہو تو صو = ل جب ن سر

مساوات تدویر خارجی کو تعبیر کرتی اور جب ن بڑا واحد ہے تو یہ مساوات تدویر داخلی

کو تعبیر کرتی ہے

$$\text{صو} = \frac{1}{4} \text{ل اور صو} = \frac{1}{4} \text{ل جب } \frac{1}{4} \text{ل اور صو} = \frac{1}{4} \text{ل جب } \frac{1}{4} \text{ل}$$

تو تدویر خارجی حاصل ہونگے جنہیں $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ کے

اگر صو = ل جب ۱ سر اور صو = ل جب ۲ سر اور صو = ل جب ۳ سر اور صو = ل جب ۴ سر

تو تدویر داخلی حاصل ہوتے ہیں جنہیں $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ کے

(۱۱۳) اگر ق نصف قطر انحناء خط منحنی کا او اس نقطہ پر جو صو اور سر کے تقصیف ہوتا ہی

بموجب دفعہ ۳۴۴ علم حساب الجزئیات کے

ق = $\frac{صو}{سر}$

لو کارٹھی نہ پیا جان میں اگر قوس کو قطب کے ناپین تو ق ایسا بدلتا ہے جیسا کہ سر بدلتا

ق = ک = $\frac{صو}{سر}$ اسو کے ک = $\frac{صو}{سر}$ اور اسو کے ک = $\frac{صو}{سر}$

ک سر + مقدار مستقل = لوک سر

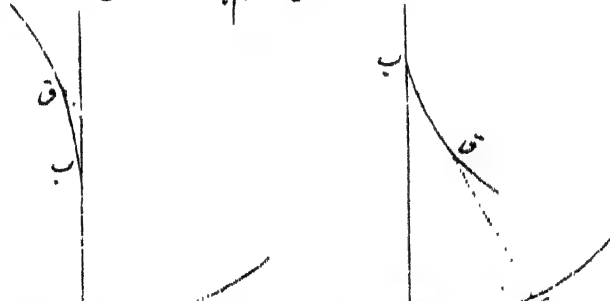
اسو کے صو = ط کی سر

اس میں ط ایک مقدار مستقل ہے اگر صو = صو + ط کے ہم رکھیں تو یہ حاصل ہوگا کہ

صو = ط (کی سر - ۱)

اب صو اس نقطہ سے بتا ہی جیسے سر = ۰

(۱۱۷) اگر مساوات ذاتی خط مخفی کی معلوم ہو تو ذی لفت کی مساوات معلوم ہو سکتی ہے



فرض کرو کہ ربع ایک خط مخفی اور ب ق لفت ہو اور قوس ربع کا طویل صو کسی نقطہ میں

ع تک پہنچے اور قوس ب کا طویل صو کسی نقطہ معین کے ق تک پیمائش ہو تو ظاہر ہے کہ

سر دو صو اور صو میں ایک ہی ہے اگر ب ق میں ہم سر کو ب سے ناپیں اور ب

عمود اس خط مستقیم پر ہے جسے سر کہ ربع پر ناپتے ہیں تو دائیں طرف کی شکل میں

صو = ق - س = $\frac{صو}{سر}$ - ساور بائیں طرف کی شکل میں صو = س - ق = س - $\frac{صو}{سر}$

پس اگر صو اور ق عام سر میں دریافت کریں تو محکو صو اور ق عام سر میں معلوم ہوگا اور مقدار

مستقل س برابر ق کی اوس قیمت کے ہے جو اس نقطہ پر لیا جای جس کے مطابق

صو = ۰

(۱۱۵) مثلاً خط مدور میں صو = ۴ ط جب سر پس

صو = س - ۴ ط جم سر
سر = صج + کچھ اور صو = فر + س کے رکھو تو

فر = ۴ ط تب صج
اسے ثابت ہوتا ہے کہ ذی لفت ساوی خط تدویر کے مساوی ہے
(۱۱۶) اسے طرح اگر مساوات ذاتی خط منحنی کی معلوم ہو تو اس کی لفت کی مساوات معلوم ہو سکتی ہے
اس واسطے کہ موجب دفعہ ۱۱۴ کے

زینو = س ± صو
اس واسطے زینو = مع (س ± صو) زینو
پس اگر صو ارقام سر میں معلوم ہو تو ہم ارقام سر میں صو کو دریافت کر سکتے ہیں
(۱۱۷) مثلاً دائرہ میں صو = ط سر تو

صو = مع (س ± ط سر) زینو = س سر ± ط س + س
اگر ہم یہ فرض کریں کہ سورہان کے تحت شروع ہوتا ہے جہاں سر = ۰ تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ س =
اور آگے اگر سورہان میں شروع ہوتا ہے جہاں لفت دائرہ میں ط س ہے تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ
س = ۰ پس صو = ط س (دفعہ ۱۱۳ علم حساب التزییات کی دیکھو)

(۱۱۸) یہ ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۱۴ اور ۱۱۶ کی ترکیب خط منحنی کے ذی لفت کا ذی لفت
دریافت کر سکتے ہیں اور خط منحنی کے لفت کا لفت بھی معلوم کر سکتے ہیں اور علیٰ ہذا التیاس
(۱۱۹) طالب علم معادلات ذاتی سے خطوط منحنی کو مرتسم کر سکتے ہیں اور اسکے واسطے یہ
مشق بڑی فائدہ مند ہے کہ وہ کوئی مساوات کسی خط کی جسکو وہ خوب اچھی طرح سے
جانتا ہو مثلاً مساوات خط تدویر کی اب اس مساوات ذاتی سے دیکھ کر اسے خط منحنی
صورت کا مرتسم ہوتا ہے اور پھر وہ دفعہ ۱۱۲ کی تدویر مدبر داخلی یا خارجی کی مساوات ذاتی لے اور
خط مرتسم کرے

خطوط منحنی دو چند انحصار کے

(۱۲۰) فرض کرو کہ سطح میں خط منحنی کے کسی نقطہ کے محدین لدا اور لدا اور کے ہیں
اور اسے خط پر پہلے نقطہ کے متصل دوسرے نقطہ کے محدین لدا + لدا لدا اور لدا + لدا

اور ۵ + ۵ سے ہیں ان دو نقطوں کے درمیان وتر
 کے [(۵ لا) + (۵ ی) + (۵ سے)] ہے فرض کرو کہ نقطہ صبیح کے نقطہ
 (لا و ی سے) تک خط منحنی کی قوس کا طول وہ ہے اور ان نقطہ صبیح کے نقطہ
 (لا و ی سے لا و ی + لا و ی + لا و ی سے) تک خط منحنی کے قوس کا طول وہ ہے۔
 اب ہم یہ فرض کریں گے کہ ۵ صو کو نقاط متصلہ کے وتر سے نسبت آخر کا برابر واحد کے
 اوس حالت میں ہو جائیگا کہ دوسرا نقطہ خط منحنی پہلے نقطہ کی طرف حرکت کرے
 پس صد غائی

$$\frac{[(۵ لا) + (۵ ی) + (۵ سے)]}{[(۵ لا) + (۵ ی) + (۵ سے)]} = ۱$$

$$\frac{[(۵ لا) + (۵ ی) + (۵ سے)]}{[(۵ لا) + (۵ ی) + (۵ سے)]} = \frac{صو}{زلہ}$$

خط منحنی کی مساواتوں سے زلہ اور زلہ کے ارقام لا میں بیان ہو سکتا ہے
 اور پہر کلی لینے سے صو ارقام لا میں معلوم ہو جائیگا
 (۱۲۱) دفعہ گذشتہ میں جو بات فرض کی سی اس کے سمجھنے کے واسطے علم حساب الخیریت
 دفعات ۳۰ اور ۳۸ کو دیکھنا چاہئے

(۱۲۲) مثلاً فرض کرو کہ خط منحنی ان مساواتوں سے تشخیص ہوتا ہے کہ

$$۵ = ۲ ط لا$$

پس خط منحنی دو اسطوانوں کے تقاطع سے پیدا ہوتا ہے یعنی ایک اسطوانہ وہ ہے جس کے
 خطوط پیدا کرنیوالے متوازی محورے کے ہیں اور وہ سطح (لا و ی) میں قریب البیضوی پر
 جسکی مساوات (۱) ہے قائم ہوتا ہے اور ایک اسطوانہ وہ ہے جس کے خطوط پیدا کرنیوالے
 متوازی محورے کے ہیں اور سطح (لا و ی) میں خط تدویر جسکی مساوات (۲) ہے قائم ہوتا ہے

$$\frac{[(۵ لا) + (۵ ی) + (۵ سے)]}{[(۵ لا) + (۵ ی) + (۵ سے)]} = \frac{صو}{زلہ}$$

اور چونکہ بیضا میں خط مخفی دو قسب اور اتوں کے طول اور عرض کے برابر ہیں اور چونکہ وہ دونوں دو مساویوں کے ہوتے ہیں لہذا وہ مساوی ہو سکتا ہے کہ قسب اور عرض کے برابر ہوں اور اس کو بر کے معلوم جملے خیال کر سکتے ہیں اور اس واسطے کہ اوپر دیکھا گیا ہے کہ اسے معلوم ہو گا

$$\begin{aligned} \text{زبر} &= \text{جبر} + \text{زبر} - \text{ق} + \text{جبر} + \text{زبر} + \text{ق} + \text{جبر} + \text{زبر} \\ \text{زبر} &= \text{جبر} + \text{زبر} + \text{ق} + \text{جبر} + \text{زبر} + \text{ق} + \text{جبر} + \text{زبر} \\ \text{زبر} &= \text{جبر} + \text{زبر} - \text{ق} + \text{جبر} + \text{زبر} \\ \text{اس واسطے} &= \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) \\ \text{اور صو} &= \text{م} + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) \\ \text{اور اس کی ہیئت اس طرح بدلو کر} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{صو} &= \text{م} + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) \\ \text{یا صو} &= \text{م} + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) \\ (۱۲۷) \text{ اگر عرض عمود سدا سے ماس پر خط مخفی کے جو بیضا میں ہو گا لہذا تو مساوات} \\ \text{زبر} &= \frac{\text{م} + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right)}{\text{زبر}} \end{aligned}$$

جو خط مخفی مستوی کے واسطے دفعہ ۸۵ میں ثابت ہوئی تھی یہاں بھی حاوی ہے
اس واسطے کہ ہر رکن مساوی کا قاطع الزاویہ اور زاویہ کا جو ماس نصف قطر دائرے
نقطہ ماس پر بناتا ہے

$$\text{اس واسطے} = \frac{\text{م} + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right) + \left(\frac{\text{زبر}}{\text{زبر}} \right)}{\text{زبر}}$$

امشئل

(۱) خطوط مخفی ط = م + م کی استفادت م اور ن کی کن قیمتوں پر موقوف ہے

محصول $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ایک صحیح ہے

(۲) خط منحنی جس کا ماس ہمیشہ خط معلوم کی برابر ہوتا ہو اس کی قوس کا طول فرن سے ناپا گیا
ثابت کرو ہمیشہ صو = میں لوک $\frac{1}{2}$ سے تشخیص ہوتا ہے

(۳) ثابت کرو کہ ڈای اولس کا خط منحنی استقامت کی قابلیت رکھتا ہے
(۴) ثابت کرو کہ خط منحنی جس کی مساوات $m(لا + د) = ط$ ہے اس کا طول

یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ $\left(\frac{ط}{(لا + د)} \right) = \left(\frac{ط}{(لا - د)} \right)$
(۵) خط منحنی $(لا + د) - (لا - د) = ط$ کی قوس کا طول

حدود غالی $(لا + د)$ اور $(لا - د)$ کے درمیان
 $\frac{1}{2} [(لا + د) + (لا - د)] = \frac{1}{2} [(لا + د) + (لا - د)]$
(۶) اگر صو = ط ہی ش تو لا اور د کے درمیان ربط دریافت کرو

(۷) ثابت کرو کہ مساوات ذاتی قریب البیضوی کہہ سکتے ہیں کہ

زیر صو = $\frac{ط}{2}$ یا صو = $\frac{ط}{2}$ لوک $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ جب صو = $\frac{ط}{2}$ اور صو = $\frac{ط}{2}$
(۸) خط منحنی $ط = ط لا کی مساوات ذاتی$

صو = $\frac{ط}{2}$ (قطر صو = ۱) ہے

(۹) ثابت کرو کہ قریب البیضوی کی لفٹ کا طول قوس فرن سے اوس نقطہ تک جہاں لفٹ

قریب البیضوی سے ملتا ہے $ط (3 - 1) = ط$ ہی آئین ۲ ط عرض ستقیم قریب البیضوی

(۱۰) تدویر دیر خارجی کا لفٹ تدویر دیر خارجی ہے اور دائرہ ساکن کا نصف قطر

$\frac{ط}{2}$ ہی اور اور نصف قطر دائرہ متحرک $\frac{ط}{2}$ ہے (دفعات ۱۰ اور ۱۱ دیکھو)

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر مساوات خط منحنی کی مساواتوں

لا = حب بر صر (ر) + جم بر صر (بر)

اور د = جم بر صر (بر) - حب بر صر (بر)

خط منحنی مستوی اور سطح سے رقبہ کرنے سے دریافت ہوتا ہے

۱۰۴

$$\text{ص} = \text{هر (ر)} + \text{هر (بر)}$$

(۱۲) خط منحنی ۸ ط ۵ = ۷ ط ۶ ط ۷ ط ۸ ط ۹ ط ۱۰ ط ۱۱ ط ۱۲ ط کا طول مبدیہ پایا گیا

$$\frac{۱۲}{۱۳} (۷ ط ۶ ط ۷ ط ۸ ط ۹ ط ۱۰ ط ۱۱ ط ۱۲ ط)$$

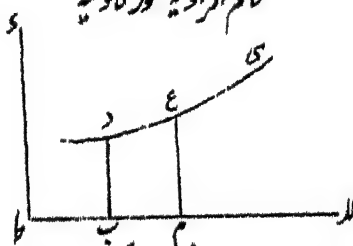
باب ہفتم

خط منحنی مستوی اور سطح بیرونی کے رقبہ

مفرد کلی

قائم الزاویہ صورت قانونیہ

مستوی رقبہ



(۱۲۸) فرض کرو کہ دسی ایک خط منحنی ہے جس کی مساوات ۵ مع (لا) ہے اور لا اور د

(والحالہ)

محدبین نقطہ ۵ کے ہیں اور لا سے وہ رقبہ تعبیر ہوتا ہے جو خط منحنی اور محور اور معین ۵ اور معین مقررہ دیکھ دیتا واقع ہے اور ط ۶ ط ۷ ط ۸ ط ۹ ط ۱۰ ط ۱۱ ط ۱۲ ط کے موافق مقرر

کیا گیا ہے تو علم حساب الجبریات کی دفعہ ۳۴ کے موافق

$$\frac{۱۲}{۱۳} = \text{مع (لا)}$$

اسے معلوم ہوا کہ لا = مع ۵ مع (لا) زلا

فرض کرو کہ هر (لا) + س کلی مع (لا) کی ہے پس

$$لا = \text{مع (لا)} + س$$

فرض کرو کہ جب معین غیر محور سے لا فاصلہ پر ہوتا ہے تو رقبہ لا ہو جاتا ہے اور جب معین

غیر محور سے لا کے فاصلہ پر ہوتا ہے تو رقبہ لا ہو جاتا ہے تو

$$لا = \text{مع (لا)} + س اور لا = \text{مع (لام)} + س$$

بیرونی کے رقبے

1.5

(۱۲۹) دائرہ پراویہ کی دفعہ کا عمل کرو

مرکز جیب مبدا ہوتا ہے تو مساوات دائرہ کی ہی ہے کہ $r = r_0$ ۔ لہذا بیان صحیح (د) ہے۔ (ط-ط)

پس ۱ = مع مح (لا) زلہ = مع مح (طآ - لا) زلہ = $\frac{لا(طآ - لا)}{\mu} + \frac{\mu}{\mu} حسا + \frac{\mu}{\mu}$

مقدار متقل اس بات کے فرض کرنے سے معلوم ہوئی کہ معین مقررہ محوری پر منطبق ہوتا ہی شکل کے مرتسم کرنے سے یہ بھی واضح ہوگا کہ محور لدا اور محوری اور دائرہ اور محوری سے لے کے فاصلہ پر

جو معین ہے ان کے درمیان جو رقبہ واقع ہوتا ہے وہ شلت اور قطعاً یقیناً ہوتا ہے اور
اس کے جملہ میں جو دو رقبے کہیں ہیں ان میں اول سے شلت کا رقبہ اور دوم سے قطعاً کا رقبہ
تعبیر ہوتا ہے اس امر سے طالب علم کو یہ کلی اعظم ہی یاد رہ سکتی ہے کہ

$$\frac{u}{b} \left(1 - \frac{r_1}{r} \right) + \frac{(r_2 - r_1)u}{r} = u \left(\frac{r_2 - r_1}{r} \right)$$

(۱۳) بیضوی پر اوسی دفعہ کا عمل کرو

فرض کرو کہ رقبہ کل مینوی کا دریافت کرنا ہی مساوات مینوی کی اس طرح لکھ سکتی ہیں کہ

۱۵ = $\frac{ص}{ط}$ (ط - ۱۵) اسے معلوم ہوا کہ رقبہ ربعہ بیضوی کا

$$\frac{\text{طبع ض}}{\text{ط}} \sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ط} - \text{ط}}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ط} - \text{ط}}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ط} - \text{ط}}} = \frac{\text{ط}}{\text{ط}} \sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ط} - \text{ط}}}$$

ہی اسے معلوم ہوا کہ رقبہ کل رضوی کا کہ طص ہی

(۱۳۱) قریب البلیضوی پر اوسی دفعہ کا عمل کرو

مساوات قریب البضوی کی ہے = $\mu = 1.5$ ط لہری توہیان

$$\sqrt{b}m_1 = (u) \in$$

اور مع $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ +

پس بموجب طریقہ کتابت دفعہ ۱۲۸ کے

$$L - l = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2) = \frac{1}{2} \pi (L^2 - l^2)$$

اگر $L = 1$ ، تو رقبہ کے واسطے $\frac{1}{2} \pi$ لگام حاصل ہوگا یعنی دو تہائی محدولام اور

معین $\frac{1}{2} \pi$ (ط لام) کا محل ضرب

(۱۳۲) خط تدویر پر اسی دفعہ کا عمل کرو

صورت قانونیہ مع زلزلہ سے کلی مطلوب بعض اوقات بہت آسانی سے لاورد کے اقام

مین ایک نئی مقدار تغیری استعانت سے بیان ہو سکتی ہے مثلاً خط تدویر میں موافق دفعہ

۳۵۸ علم حساب الجبرئیات کے لکھ سکتے ہیں کہ

$$L = ط (1 - \text{حم بر}) \text{ اور } r = ط (\text{بر} + \text{جب بر})$$

اس واسطے مع زلزلہ = ط ا مع (بر + جب بر) جب بر زیر

$$= ط ا مع بر جب بر زیر + ط ا مع (1 - \text{حم بر}) زیر$$

اسے یہ حاصل ہوتا ہے کہ ط (- بر حم بر + جب بر) + ط (بر - جب بر)

اب اگر اس کو بر کے حدود وغائی اور کہنے درمیان لین تو ہم رقبہ نصف خط تدویر کا حاصل

اور حاصل $\frac{1}{2} \pi$ ہوگا اسے معلوم ہوا کہ رقبہ کل خط تدویر کا برابر رقبہ دائرہ تحرک کے

رقبہ سے ہوتا ہے

(۱۳۳) مساوات انیس تدویر کی ہے کہ

$$L = ط (1 - \text{حم بر}) \text{ اور } r = ط \text{ بر}$$

اسے ثابت ہو سکتا ہے کہ کل رقبہ منحنی دو چند دائرہ متحرک سے ہی

(۱۳۴) اگر ایک خط منحنی مساوات $r = \text{مج} (L)$ سے تخصیص ہو تو خط منحنی اور محور

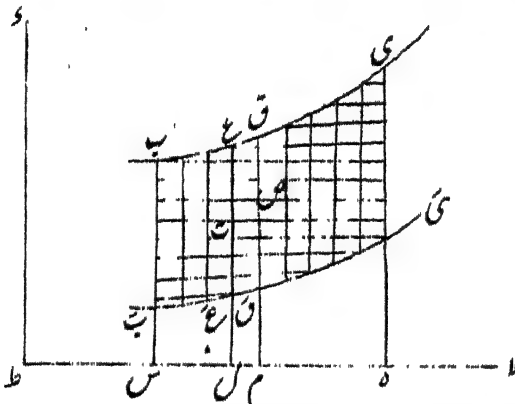
اور خطوط استیقیم جو متوازی محور لک کے کم اور کم کے فاصلوں پر کچے جائیں ان سے

درمیان جو رقبہ ہوگا وہ مجموع مج (ر) زیر ہوگا یہ دعویٰ اس طرح ثابت ہو سکتا ہے

جس طرح کہ دفعہ ۱۲۸ کا دعویٰ ثابت ہو سکتا ہے

(۱۳۵) دفعات ۱۲۸ اور ۱۳۴ کی صورتوں میں علم حساب الکلیات کے استعمال میں آئے گی۔
 نہایت سادہ اور بکار آمد مثالیں ہم پہلے بیان کر چکے ہیں کہ علم حساب الکلیات کی تدوین اور
 ایجاد کی اسباب میں ایک سبب یہ بھی بڑا ہوا ہے کہ اسے مسئلہ رقبہ منحنی کے دریافت کرنا
 حل ہوتا ہی اور موزوں استعمال میں آتی ہیں وہ ایسی خاصا اور عجیب ہیں کہ اس کے اعمال جو
 ہونے چاہئے بخوبی سمجھ میں آتے ہیں دفعہ کی شکل میں طالب علم دیکھ لے کہ قائم الزاویہ ع و غ م
 کیا خوبی کے ساتھ دیکھ لے تبیر ہوتا ہی اور رقبہ لڑی ب کے دریافت کر نکال
 یہی معنی رکھتا ہے کہ اول ہم وہ از یاد کریں جو ع د ل سے تعبیر ہوتا ہی اور د ل
 غیر محدود کم کریں غرض رموزہ کام میں آئیں ہیں کہ اس کے اعمال بے تکلف عیان ہو جائیں
 (۱۳۶) فرض کرو کہ خط منحنی = س جب $\frac{ل}{ط}$ اور محور ل اور معین جو ل اور ل ل کے
 فاصلہ آئیں اور محور ان س کے درمیان کا رقبہ دریافت کرنا ہی ہم کو معلوم ہے کہ
 س قطع جب $\frac{ل}{ط}$ زل = س ط (جم $\frac{ل}{ط}$ - جم $\frac{ل}{ط}$)
 پس فرض کرو کہ ل = ۱۰ اور ل ل = ط کہ اس واسطے رقبہ ۲ س ط ہی
 دوم فرض کرو کہ ل = ۱۰ - اور ل ل = ۲ ط کہ کو حاصل
 اس صورت میں صفر ہو جائیگا اسکے اس کو دخل ط ہی نہیں ہو سکتا اس واسطے کہ رقبہ کوئی مثبت
 مقدار ہونی چاہئے نفس اللہ میں جب $\frac{ل}{ط}$ منفی ل ل = ط کہ سے ل ل = ۲ ط کہ تاکہ ہے
 لیکن اثبات میں کہ رقبہ برابر مع ۲ زل کے ہے مثبت فرض کیا گیا ہے
 اگر حقیقت میں منفی ہو تو رقبہ مع (-) زل ہوگا
 پس اس حال کی صورت میں رقبہ
 س ط مع جب $\frac{ل}{ط}$ زل نہیں ہوگا بلکہ س ط مع جب $\frac{ل}{ط}$ زل + س ط مع (-) جب $\frac{ل}{ط}$ زل ہوگا
 یعنی س ط مع جب $\frac{ل}{ط}$ زل - س ط مع جب $\frac{ل}{ط}$ زل ہوگا
 اسے ۲ س ط + ۲ س ط یعنی ۴ س ط حاصل ہوگا

رقبہ مستوی قائم الزاویہ صورت قانونیہ کل مشاہدہ
(۱۳۷) دفعہ ۱۳۸ میں مننے ایک صورت قانونیہ رقبہ منحنی کی دریافت کرنیکہ واسطے تحریر کی ہے
اوس صورت قانونیہ میں یہ فرض کیا جاتا ہے کہ رقبہ حد غائی اور متعدد رقبوں کی ہے
جو اوسکی اجزاء ترکیبی ہیں اور ہر ترکیبی ایک مقدار ایسی ہی جسکا انموزج Δ لے لے انہم
ایک اور ترکیب بیان کرتے ہیں جس میں رقبہ مطلوب اور رقبوں میں تحلیل ہونے والی جو اوس کے
اجزاء ترکیبی ہیں



فرض کرو کہ مکہ وہ رقبہ درخت کزائی جو درمیان خطوط منحنی بے قی اور بے قی کی
اور خطوط مستقیم بے قی اور ی کی واقع ہے ایک سلسلہ خطوں کا متوازی
محور کے کچھ اور ایک دوسرا سلسلہ خطوط کا متوازی محور لے کے نکالو اور فرض کرو کہ
اس طرح جو تنطیل بنائی جائیں ان میں سے ایک صحت ہی اور ص کے محدودین لدا اور
اور ت کے محدودین لدا + Δ لدا اور د + Δ ی میں تو رقبہ مستطیل ص ب کا
 Δ لدا ہے اسے معلوم ہو کہ رقبہ مطلوب اس طرح دریافت ہو سکتا ہے کہ تمام متین
 Δ لدا کی جمع کریں اور حد غائی Δ لدا اور Δ کو غیر متناہی کم فرض کر کے حد غائی

حاصل کریں
اب جمع مطلوب ایسی رقبوں Δ لدا کی طرح ہوتی ہے کہ اول ہم مستطیل
جو متناہی صحت کے ہیں اور قطع بے قی ع ق کے اندر واقع ہیں جمع کرتے ہیں جب اس

قطعه کا قریب حاصل ہو جائے تو اس قطعہ کے متشابه جزاؤں قطعات بت اور سی کی کے درمیان واقع ہوں
 اوں کو جمع کریں غلطی اس میں یہ واقع ہوئی کہ ہر ایک قطعہ کے نیچے اور اوپر جزاؤں کی سی ہیں ان کا قریب
 ٹھیک ٹھیک نہیں لیتے کیونکہ وہ کامل مستطیل نہیں ہیں اور یہ غلطی حد غائی کے لینے میں جب
 ۵۰ لہ اور ۵۰ غیر متناسب کم کی جائیں جاتی ہوگی

فرض کرو کہ $r = \text{مح (د)}$ مساوات اور کے خط منحنی کی ہے اور $r = \text{مح (د)}$ مساوات
 نیچے کی خط منحنی کی اور $r = \text{مح (د)}$ مساوات اور $r = \text{مح (د)}$ مساوات
 یہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{1}{\text{صح}} = \frac{\text{صح}^{(1)} + \text{صح}^{(2)}}{\text{زلا زری}}$

اس واسطے کہ اس صورت بیانہ کا مؤرخین وہی مطلب ہے جو اوپر الفاظ میں بیان کیا گیا

اب مع زى = زى اسو^{سط} مع^ط زى = مع^ط (ل) - ضج (ل)

پس اسے یہ حاصل ہوا کہ

1 = سنج [مجلد - صحیح] [نمونه]

اس حالت میں اس صورت بیانہ کی صداقت کو آنکھ سے دیکھتے ہیں اس لئے کہ

مع (ل) - معج (ل) = ع - ع ل یس [مع ل - معج ل] ۵۷

رقبہ قطعہ ع و ع ق کا ہی اور اوپر کی صورت قانونیہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ وہ

حاصل جمع ایسی قطعات کا ہے

حاصل جمع ایسی قطعات کا ہے
خطوط مستقیم جو اوپر کی شکل میں کہنے میں وہ کچھ ضرور نہیں کہ برابر ہی ہوں یعنی اجزا اور
جنکا انوزج لا دے کچھ ضرور نہیں کہ ایک ہی رقبہ رکھیں

(۱۳۸) دفعہ گزشتہ کا محض یہ کہ رقبہ اس سادات

$$1 = \text{سرع} \cdot [\text{مج}(\lambda) - \text{صح}(\lambda)] \cdot \lambda$$

۱ = صمغ [مج (لد) - صمغ (لد)] زلد
سے دریافت ہوتا ہے یہ نتیجہ نہایت آسان طور سے حاصل ہوتا ہے جیسا کہ دفعہ گذشتہ کے

سطوح بیرونی کے رقبے

خطوط مخنی مستوی اور

۱۱۰

دوسرے حصہ میں بیان کیا گیا ہے کہ قطعی ضرورتاً کہ ہم کلی شتاہ کی صورت بیان کرتے لیکن ہم

۱ = $\frac{\text{سمت مع زلد زری}}{\text{سمت مع زلد زری}}$ لکھ کر طلبہ کو اس بات پر توجہ کیا کہ وہ کلی شتاہ کو توضیح اور تشریح کے ساتھ سمجھیں اور اس طرح

جہاں قطعی ضرورت کلی شتاہ کی امتداد میں ہوگی وہاں طالب علم آسانی سے اس کا عمل کر لیا

(۱۳۹) رقبہ جس کی قیمت ہم نے نکالی ہے خطوط مخنی لد = $\frac{\text{هج (د)}}{\text{هج (د)}}$ اور لد = $\frac{\text{هج (د)}}{\text{هج (د)}}$

سے اور خطوط مستقیم سے جو محور لد اور د کے توازی ہیں اور ہ کے فاصلوں پر ہیں محدود ہوئے تو یہ طرح سے ہر کو یہ حاصل ہو سکتا ہے کہ

۱ = $\frac{\text{سمت مع زلد زری}}{\text{سمت مع زلد زری}}$ [هج (د) - هج (د)] زری

دفعات ۱۳۶ اور ۱۳۸ کی صورت قانونیہ کی بعض مثالوں پر خیال کریں تو معلوم ہوگا کہ ہر مثال میں

دونوں صورت قانونیہ کام میں آسکتی ہیں لیکن اکثر اوجہن سے ایک کا استعمال نسبت دوسری

کے آسان ہوتا ہے

(۱۴۰) قریب البیضوی $\frac{۲}{۳}$ ط لا اور دائرہ $\frac{۲}{۳}$ ط لا - $\frac{۲}{۳}$ ط لا کے درمیان جو قریب

واقع ہوا ہو سکا دریافت کرنا منظور ہے

خطوط مخنی سید پر گذرتی ہیں اور اس نقطہ پر ملتی ہیں جہاں لد = $\frac{\text{ط پس اگر ہم وہی قریب}}{\text{ط پس اگر ہم وہی قریب}}$

لیں جو محور کی ثقت جانب میں واقع ہے تو یہ حاصل ہوگا کہ

۱ = $\frac{\text{سمت مع (ط لا - ط لا)}}{\text{سمت مع (ط لا - ط لا)}}$ [زلد = $\frac{\text{ط لا}}{\text{ط لا}} - \frac{\text{ط لا}}{\text{ط لا}}$]

مطلوبہ قریب $\frac{۲}{۳}$ (ط لا - ط لا) ہوگا

فرض کرو کہ اس مثال میں ہم اول کلی بلحاظ لا کے لینی چاہتے ہیں مساوات $\frac{۲}{۳}$ ط لا - $\frac{۲}{۳}$ ط لا

سے ہم یہ استنباط کرتے ہیں کہ لد = $\frac{\text{ط لا}}{\text{ط لا}} \pm \frac{\text{ط لا}}{\text{ط لا}}$ اور یہ شکل کے دیکھنے سے

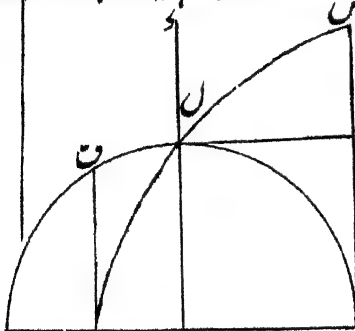
معلوم ہو جائیگا کہ اس سوال میں پنجمی کی علامت لینی چاہئے پس فرض کرو کہ لد $\frac{۲}{۳}$ ط لا - $\frac{۲}{۳}$ ط لا کے اور لد $\frac{۲}{۳}$ ط لا کے قائم ہوتا ہے

سطوح بیرونی کے رقبے

$$= \frac{7}{3} - \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$$

طالب علم کو چاہئے کہ وہ شکل بنائی اور کلیات کی حدود غائی کی طرف نہایت توجہ کرے۔

(۱۴۱) اس شکل میں جس مرکز دائرہ بال د کا ہی



اول ب اور ل دس رقبوں کے حاصل کرنے کے واسطے جو کلیات لیجا لگی اور نکایاں اب ہم کرتے ہیں
اس مثال کو فقط اس نظر سے لکھا ہے کہ کلی ثناتہ کی توضیح اور تشریح ہو جاوے اور اس میں
کوئی اور کسب پختی نہیں ہیں یہ ہر قبے اول صورتانہ سے جو انتہی بیان ہو ہیں آسانی
استخراج ہوتی ہیں اول ب تفاوت رقبہ قریب البیضویہ اول ص اور ربعہ دائرہ ص ل ب

کاجی اور علی بن اقصی اس ل دس معلوم ہو سکتا ہی
ص کو مبد و شہر و رقبہ الالب کے دریافت کرنے کے اندر اس میں آسانی ہی کہ محور لاکہ مثبت
بائیں طرف مقرر کریں اگر m ط عرض مستقیم قریب البیضوی کا ہو تو a ط نصف قطر دائرہ کا
ہو گا مساوات قریب البیضوی کی $2a = ط (ک - ل)$ اور مساوات دائرہ کی $2a = ط - ل$ ل
فرض کرو کہ اول عم بلحاظ لاکہ سرخروی لین تو

رقبه $\frac{1}{2}$ الب = $\frac{1}{2}$ طمع $\frac{1}{2}$ طمع $\frac{1}{2}$ طمع $\frac{1}{2}$ طمع

$$\sqrt{p_1 - p_2} = \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}$$

منسختی

اسوے کہ یہاں (لام - لار) Δ اس قطعہ کو تعبیر کرتا ہے جو درمیان دو خطوط اور دو خطوط تقسیم کے واقع ہوتا ہے اور یہ دو خطوط تقسیم متوازی محور لار کے ہیں

خطوط منحنی مستوی اور سطح

بیرونی کے رقبے

اور ہم قطعات محمولہ سے ان کے فاصلوں پر واقع ہیں جو ۱۰ اور ۲ ط کے درمیان ترتیب پاتے ہیں
پس کلی لمبا ط کے حدود غائی ۰ اور ۲ ط کے درمیان واقع ہی
فرض کرو کہ ہم اول کلی لمبا ط کے لین تو ہم کو چاہی کہ رقبہ کو دو حصوں میں خط استقیم ان سے
تقسیم کریں فرض کرو کہ

$$۱ = ۱ (۱۴ ط - ۱۴ ط) \text{ اور } ۲ = ۱ (۱۴ ط - ۱۴ ط)$$

تو رقبہ اول = ط مع ۱ مع زلزلی = ط مع (۱ - ۱) زلا

رقبہ اول = ط مع ۲ مع زلزلی = ط مع ۲ مع ۱ زلا

ان دو حصوں کا حاصل جمع رقبہ اول ب کا ہے

دوم رقبہ اول دس کا لو اب فرض کرو کہ محور ل کی مثبت سمت دائیں طرف ہے

تو مساوات قریب البیضوی کی ۱ = ۱ (۱۴ ط + ۱۴ ط) اور دائرہ کی ۱ = ۱ (۱۴ ط - ۱۴ ط) ہے

کلی لمبا ط کے اول ہم لیتے ہیں پس فرض کرو کہ

$$۱ = ۱ (۱۴ ط - ۱۴ ط) \text{ اور } ۲ = ۱ (۱۴ ط + ۱۴ ط)$$

تو رقبہ اول = ط مع ۱ مع زلزلی

اب ہم کلی لمبا ط کے اول لیتے ہیں تو رقبہ کو دو حصوں میں خط ل کی سی تقسیم کرنا
فرض کرو کہ

$$۱ = ۱ (۱۴ ط - ۱۴ ط) \text{ اور } ۲ = ۱ (۱۴ ط - ۱۴ ط)$$

تو مکتوبہ دریافت ہو گا کہ دس = ۱۴ ط = ۱۴ ط = ص کے فرض کرو تو

رقبہ اول = ط مع ۱ مع زلزلی

رقبہ اول = ط مع ۲ مع زلزلی

ان دو حصوں کے مجموعہ سے رقبہ اول دس کا تعمیر ہوتا ہے

(۱۴۲) دفعات ۱۳۲ اور ۱۳۹ کے صورت قانونہ دیان ایک صورت میں ٹبری کا بار

جہاں خطوط منحنی حد بنائو الے ایک خط منحنی کے فروع ہوں فرض کرو کہ مساوات خط منحنی کی

$$(s - m - s) = s^2 = \tau^2 - \lambda^2$$

$$s = m + \lambda + s \pm \sqrt{\tau^2 - \lambda^2}$$

$$\text{اب یہاں } \tau = (s) = m + \lambda + s - \sqrt{\tau^2 - \lambda^2}$$

$$\tau = (s) = m + \lambda + s + \sqrt{\tau^2 - \lambda^2}$$

$$\text{پس } \tau = (s) - \tau = (s) = \sqrt{\tau^2 - \lambda^2}$$

اور کل رقبہ منحنی

$$= \frac{1}{2} \pi (\tau^2 - \lambda^2) \text{ زلا یعنی کہ } \tau^2 \text{ ہے}$$

(۱۴۳) اب تک ہم نے محور قائم الزاویہ فرض کئے لیکن اگر وہ محرف ہوں اور زاویہ دہرائی ہو تو

دفعہ ۱۲۸ کی صورت قانونیہ اس صورت کی ہو جائیگی کہ

$$1 = \text{ح د مع } \tau = (s) \text{ زلا}$$

اور اور صورت قانونیہ میں ہی تبدیلی اسی قبیل کا واقع ہوگا اور یہ بھی ظاہر ہے کہ رقبہ کے لیے

اجزاء ترکیبی جو τ لا اور τ لا سے قائم الزاویہ محروں کی حالت میں

تعبیر ہوتی تھی اب τ لا اور τ لا سے اس حالت

میں تعبیر ہونگی کہ محروں کا میلان زاویہ دہرائی ہو

مثلاً مساوات قریب البیضوی کی $\tau = \tau^2 - \lambda^2$ جو τ لا اور τ لا سے قائم الزاویہ محروں کا نظم سطح

قطر اور تماس طرف قطر پر محرف محروں تو خط منحنی اور محور τ لا اور اس کے

معین کے جیسے $\tau = s$ کے ہے ان سب کے درمیان جو رقبہ واقع ہوگا وہ یہ ہوگا کہ

$$\text{جب د شمع } \frac{1}{2} \pi (\tau^2 - \lambda^2) \text{ زلا} = \frac{1}{2} \pi \tau^2 - \frac{1}{2} \pi \lambda^2$$

یعنی دو تہائی اس متوازی الاضلاع کی ہے جس کا ایک ضلع متحد τ ہے اور اس کی

متصل کا ضلع متحد τ کی طرف کا معین ہے

سطح بیرونی کے قریب

خط منحنی مستوی اور

رقبہ مستوی قطبی شعور قائمہ سطحی مغز



(۱۲۷) فرض کرو کہ سطح ایک خط ختم ہے جسکی قطبی مساوات لی = سطح (بر) اور تق اور بر محدود نقطہ تق کے ہیں اور خط تقی کو نصف قطر دائرہ سطح اور نصف قطر دائرہ سطح جو کسی نقطہ معین تر نکلا گیا کہ پتا چلا کہ سطح سے لا علم جہر مقابلہ میں پہنچا رہے ہوں سطح درمیان جو رقبہ ہی او کو ل سے تعبیر کرو تو حکم دفعہ ۱۳۳ علم حساب الخانات کے

$$\frac{ز}{ل} = \frac{[خ (تر)]}{[خ (بر)]}$$

اسے معلوم ہو کہ $\frac{ل}{ز} = \frac{۱}{۲}$ مع $[خ (بر)]$ زبر فرض کرو کہ سطح (بر) کلی $[خ (بر)]$ کی ہو تو

$$۱ = سطح (بر) + سطح$$

فرض کرو کہ ل رقبہ کو اس حالت میں تعبیر کرتا ہے کہ نصف قطر دائرہ سطح سے بر کے قریب ابتدائی سے ہو اور ل رقبہ کو اس صورت میں تعبیر کرتا ہے کہ نصف قطر دائرہ سطح سے بر پر خط ابتدائی سے ہو تو

$۱ = سطح (بر) + سطح$ اور $ل = سطح (بر) + سطح$ اس واسطے $ل - ۱ = سطح (بر) - سطح (بر) = \frac{۱}{۲} سطح [خ (بر)]$ زبر (۱۲۵) خط پچان مساوی الزاویہ پر اوپر کی دفعہ کا عمل کرو

سطوح بیرونی کے رقبے

خطوط سطحی بستوی اور

۱۱۵

اس خط سطحی بستوی = $\frac{1}{2} \times \text{مربع} \times \text{پس} = \frac{1}{2} \times \text{مربع} \times \text{پس} + \text{س}$
 اور $\frac{1}{2} \times \text{مربع} \times \text{پس} = \frac{1}{2} \times \text{مربع} \times \text{پس} + \text{س}$
 اس میں س اور پس کے رقبے کے اطراف کے نصف قطر دائرہ میں
 (۱۷۶) قریب البیضوی میں اور کی دفعہ کا عمل کرو
 فرض کرو کہ اس کے قطب ہو تو

نق = $\frac{\text{ط}}{\text{مربع}} \times \text{پس} = 1 = \frac{\text{ط}}{\text{مربع}} \times \text{مربع} = \text{ط}$
 $\text{ط} = \text{مربع} \times (1 + \text{مربع}) = \text{ط} \times \text{مربع} = \text{ط} \times \text{مربع} + \text{ط} \times \text{مربع} + \text{ط} \times \text{مربع}$
 اسے معلوم ہو گا کہ $1 = \text{ط} \times \text{مربع} + \text{ط} \times \text{مربع} + \text{ط} \times \text{مربع}$
 فرض کرو کہ $\text{بر} = 10$ اور $\text{مربع} = 100$ کہ تو رقبہ $\text{ط} + \frac{\text{ط}}{100}$ یعنی $\frac{10001}{100}$ حاصل ہو گا
 اور یہ دفعہ ۱۳ کے مطابق ہے
 ایک اور مثال بنانے کے واسطے فرض کرو کہ خط منظم اور محور کا نقطہ تقاطع قطب ہے اور محور
 خط ابتدائی ہے یہاں

$\text{مربع} = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع} = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع}$
 پس $1 = \text{ط} \times \text{مربع} + \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع} = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع}$
 $1 = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع} = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع}$
 اب $\text{مربع} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع} = \text{مربع} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع}$
 $1 = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع} = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع}$
 اور $\text{مربع} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع} = \text{مربع} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع}$
 فرض کرو کہ $\text{بر} = 10$ تو کلی کی یہ صورت ہو جاگی کہ یہ
 $1 = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع} = \text{ط} \times \text{مربع} - \text{ط} \times \text{مربع}$

سطوح بیرونی کے رقبے

۱۱۶

خطوط منحنی مستوی اور

اسے معلوم ہو کہ مقدار متصل کی زیادہ کرنے سے یہ حاصل ہوگا کہ

$$1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \dots$$

مقدار متصل صفر ہوگی اگر ا کا آغاز خط ابتدائی سے ہو کیونکہ تحقیقات سے معلوم ہوگا کہ

$$1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \dots$$

(۱۲۷) خط منحنی $1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \dots$

$$1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \dots$$

اور مع $1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \dots$

$$1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \dots$$

$$1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \dots$$

فرض کرو کہ ہم کو اس نہایت چھوٹے حصہ کا رقبہ دریافت کرنا ہی جو خط منحنی اور نصف قطر کے خط ابتدائی سے زاویے قائمے بناتا ہے احاطہ ہوتا ہے تو اس صورت میں - اور $\frac{1}{2}$ کہ حد

غائی کلی کی ہونگیاں پس رقبہ مطلوب

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right]$$

کلی نشاۃ

قطبی صورت قانونیہ

خطوط منحنی مستوی

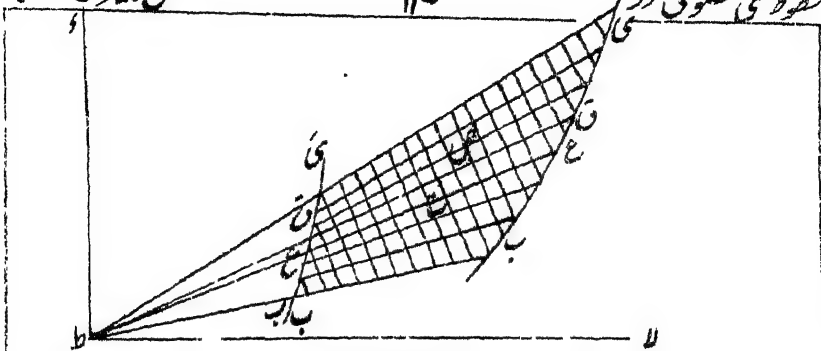
(۱۲۸) دفعہ ۱۲۴ میں ہم نے صورت قانونیہ رقبہ منحنی دریافت کرنے کے واسطے قائم کی ہے

صورت قانونیہ میں فرض کیا گیا ہے کہ رقبہ اول متعدد رقبہ کی کہ اجزاء ترکیبی ہیں

حد غائی ہے اور ہر ایک جز ترکیبی ایسی مقدار ہے جس کا انودج $\frac{1}{2}$ ہے

اب ہم ایک اور ترکیب لکھتے ہیں جسے کہ رقبہ مطلوب کی تحلیل اجزاء ترکیبی

میں ہوتی ہے



فرض کرو کہ خطوط منحنی ب ع ق سی اور ب ع ق سی اور خطوط مستقیم ب ب اور سی سی کے درمیان جو رقبہ ہے، اسکو دریافت کرنا مطلوب ہے، ایک سلسلہ نصف اقطار دائرہ کا طے سے لکھو اور ایک سلسلہ دائرہ کا طے کے مرکز پر پس رقبہ مستوی منحنی ذوار رقبہ الاضلاع میں تقسیم ہو گیا فرض کرو کہ ان اجزاء ترکیبی ہیں سے ایک صت ہی اور نقطہ ص کے ی اور پر محدودین قطبیہ اور ت کے ی + ی اور بر + ی بر محدودین قطبیہ میں تو رقبہ جز ترکیبی صت کا آخر کار ی ی بر ی ی ہوگا اسے معلوم ہو کہ رقبہ مطلوب ی ی بر ی ی کی تمام قیمتوں کے جمع کرنے سے حاصل ہوگا پس عمل صدغائی کے دریافت کر نیکا ی بر اور ی ی کو غیر متناہی کم فرض کر کے کرو ایسی ارقام ی ی بر ی ی کے تجمیع اس طرح ہوتی ہے کہ اول ہم وہ اجزاء ترکیبی جمع کرتے ہیں جو صت کے متشابہ قطعہ ع و ق ع میں ہیں اور اس طرح سی رقبہ قطعہ کا دریافت کرتے ہیں اور پھر اس قطعہ کے جو متشابہ قطعات ب ب اور سی سی کے درمیان واقع ہیں انکو جمع کرتے ہیں

فرض کرو کہ ی = ع (ر) مساوات خط منحنی ب ع ق سی کی ہو اور ق = ص (ر) مساوات خط منحنی ب ع ق سی کی ہی اور ص وہ زاویے ہیں جو ط ب اور ط ی خط ط ل کے ساتھ بناتے ہیں اور ل رقبہ مطلوب ہے تو
 ل = ص (ر) مع (ر) ی زیر زو

مسلمہ پروردگار کے رقبہ

خطوط منحنی - توی اور

یہ صورت بیانہ روز میں اوسے مطلب کو ادا کر رہے ہیں کہ جو ان کے میں ہم نے ابھی لکھا

اب مع قی زون = $\frac{1}{2} \times \text{مساحت قی زون} = \frac{1}{2} \times \{ \text{مح (دس)} - \text{مح (دس)} \} \times \text{نہر}$

اسو اسطے $1 = \frac{1}{2} \times \text{مساحت} \{ \text{مح (دس)} - \text{مح (دس)} \} \times \text{نہر}$
 اس صورت میں ایک ہی دفعہ میں صورت بیانہ کی جا اور دست ہونا فطر میں اجنا ہے

اسو اسطے کہ طبع = مح (ر) اور طبع = مح (دس) پس

$$\frac{1}{2} \{ \text{مح (ر)} - \text{مح (دس)} \} \times \text{نہر} = \text{مح (دس)} \times \text{نہر}$$

کو رقبہ قطعہ ع و ع ق کا مقرر کر سکتے ہیں اور صورت قانونیہ خود کہہ رہی کہ رقبہ ل
 برابر ایسی قطعات کے مجموعہ کے حد غائی ہے

(۱۷۹) دفعہ ۱۳۸ میں جو کیفیت لکھی ہے وہ اس موقع پر ہی مکرر لکھی جاسکتی ہے
 ہے جو دفعہ گذشتہ کی ابتدا میں عمل لکھا ہے وہ اسلئے نہیں لکھا ہے کہ کلی شاہ کا لینا
 قطعاً ضروری تھا بلکہ اس نظر سے لکھا ہے کہ رقبہ منحنی کی دریافت کرنے کا عمل توضیح اور
 تصریح عمل کلی شاہ کے کرتا ہے

(۱۵۰) خطوط منحنی کی مساواتیں بر = مح (لی) اور بر = مح (لق) جدا جدا ہیں

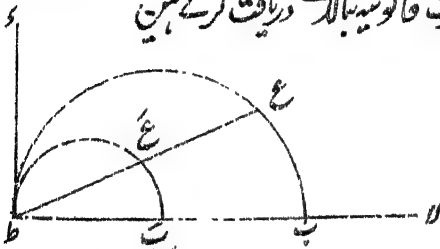
اور مساواتیں دائروں کی نق = ط اور لی = ص جدا جدا ہیں اور ان خطوط منحنی
 اور دائروں کے جو رقبہ احاطہ ہوا ہے اس کا رقبہ دریافت کرنا منظور ہے اس صورت میں
 ص ت کے مانند جو اجزا ترکیبی قطعہ ع و ع ق کے جمع کی تھی اسکی جگہ وہ اجزا
 ترکیبی جمع کرو جو دو دائروں اور دو خطوط منحنی کے درمیان واقع ہوں ان دو دائروں

سے نسبت احاطہ ہوتا ہے اور یہ دو خطوط منحنی مساواتوں بر = مح (لی) اور
 بر = مح (لق) سے تشخیص ہوتے ہیں پس عمل یہ حاصل ہوتا ہے کہ

۱ = طبع $\frac{1}{2} \times \text{مساحت} \{ \text{مح (لی)} - \text{مح (لق)} \} \times \text{نہر}$
 دفعات ۱۷۸ اور ۱۵۰ کی صورت قانونیہ کی بعض شالون پر اب خیال کریں تو معلوم ہوگا

ایک مثال میں ان جہز قانونیہ میں سے ہر ایک کام میں آ سکتی ہے اگر ایک استعمال بہت
دوسرے کے شکل ہوتا ہے

(۱۵۱) دو نصف دائروں ط ع ب اور ط غ ب اور خط استقیم ب کے درمیان
جو رقبہ واقع ہوتا ہے اس کو صورت قانونیہ بالکے دریافت کرتے ہیں



فرض کرو کہ ط ب = س اور ط ب = عہ تو مساوات ط ع ب کی نق = عہ جم بر

اور مساوات ط غ ب کی نق = س جم بر پس رقبہ

= مجموعہ جمع لی زیر زو

اب س جم جمع لی رلی = $\frac{1}{2} \pi (س^2 - عہ^2)$ جم بر

پس رقبہ = $\frac{1}{2} \pi (س^2 - عہ^2)$ مجموعہ جمع بر زیر = $\frac{1}{2} \pi (س^2 - عہ^2)$

فرض کرو کہ ہم اول کلی بلحاظ بر کے لیتی ہیں تو رقبہ کو اس صورت میں دو حصوں میں تقسیم
دائرہ سے تقسیم کرد اور یہ قوس دائرہ کا کے مرکز اور ط ب کے نصف قطر پر

کچھ پس رقبہ جو اس قوس اور خط استقیم ب اور رقبہ نصف دائرہ سے

احاطہ ہوا ہے مجموعہ جمع لی زیر ہے

اور رقبہ قوس مذکور اور نصف دائرہ ط ع ب اور نصف دائرہ کلان کے احاطہ کیا گیا ہے

مجموعہ جمع لی زیر ہے

پس ان دو نوریوں کے مجموعہ سے رقبہ مطلوب دریافت ہوگا

(۱۵۲) دفعہ ۱۴۱ کے مثال قطبی صورت قانونیہ کا عمل کرو جس قطب ہے اور

رقبہ شکل ستوی کا تعبیر ہوتا ہی فرق بتلا دی اول صورت میں رقبہ کی تحلیل مستطیلوں میں ہوئی ہی اور Δ لہذا Δ ٹھیک ٹھیک رقبہ ایک مستطیل کی پس ان مستطیلوں کے مجموعہ سے رقبہ مطلوب کے تعبیر کر عین نقطہ یہ غلطی ہوتی ہے کہ ہر ایک قطعہ کے اور نیچے جو بقاعدہ اجزا ترکیبی واقع ہوتے ہیں ان میں جو خطا کی جاتی ہے اونکا بیان دفعہ ۱۸۸ کیا گیا لیکن دوسری صورت میں اجزا ترکیبی میں سے کسی ایک جز ترکیبی کا ہی صحیح رقبہ Δ ہو Δ نق نہیں ہوتا اس لئے ہر جز ترکیبی میں ایک غلطی ہوتی ہے اس واسطے ضرور ہوا کہ ہم اس بات کو قاعدہ کے موافق بتلا دیں کہ حد غائی لینے میں غلطی بالکل نہیں باقی رہتی اور یہہ سطح بتلائی جاتی ہی کہ دفعہ ۱۸۸ کی شکل میں جز ترکیبی صحت تفاوت دوم در قطع کا ہے اور اسکا ٹھیک رقبہ

$$\frac{1}{2} (a + b) \Delta \text{ بر } - \frac{1}{2} a \Delta \text{ بر}$$

یعنی $\frac{1}{2} a \Delta \text{ بر} + \frac{1}{2} b \Delta \text{ بر}$ ہے
پس اول رقم کو رقبہ تعبیر کرنے کے لئے رکھ لیا ہے اور رقم $\frac{1}{2} (a + b) \Delta \text{ بر}$ کو چوڑی اور ان دونوں رقموں کی نسبت

$$\frac{\frac{1}{2} a \Delta \text{ بر}}{\frac{1}{2} (a + b) \Delta \text{ بر}} = \frac{a}{a + b}$$

Δ کو چوڑی کا فی فرض کر کے ہم اس نسبت کو جتنا چاہیں چوڑی بنا سکتے ہیں اسے معلوم ہو کہ جو ارقام ہم نے چوڑی میں اونکے مجموعہ کو مقابلہ اول ارقام کے مجموعہ کے جنکو رقبہ تعبیر کرنے کے لئے بننے رکھ لیا ہے آخر کو معدوم ہو جائیگی اور حد غائی میں کوئی غلطی ہونے لگی اور قطعی صورت قانونیہ

(۱۵۵) فرض کرو کہ طول اوس قوس منحنی کا صوبے جو کسی نقطہ معین سے اوس نقطہ ناپا جائے جسکے محدین نق اور بر میں اور اس دوسرے نقطہ سے جو ماس نکال دیا اوس پیر نمود جو مبدی سے قائم کیا جائے اوسی ع سے تعبیر کرو تو جیب اوس زاویہ

منظوم سخن مستوی اور

سطح سیرونی کے رقبے

= س - ط - ح ا (س - ط - ح)
 = س - ط - ح ا (س - ط - ح)
 = س - ط - ح ا (س - ط - ح)

اس کو حدود غامی $\text{ط} = \text{ط}$ اور $\text{ری} = \text{س}$ کے درمیان مقرر کرنے سے ہموکہ حاصل ہوتا ہے کہ
 یعنی $\text{ط} + \text{ری} = \text{س}$ یعنی $\text{ص} + \text{ط} = \text{س}$ کہ اسے معلوم ہو کہ رقبہ $\frac{\text{س}}{2}$ $\text{ص} + \text{ط} = \text{س}$ کہ
 یعنی $\text{ط} + \text{ری} = \text{س}$ $\text{ص} + \text{ط} = \text{س}$ کہ ہی اور اس کا حاصل کو دو چند کرنے سے وہ رقبہ
 حاصل ہوتا ہے جو خط غنی اور نصف اقطار دائر کے درمیان واقع ہو اور یہ نصف اقطار دائر
 دو متصل کے قرن سے کہے گئے ہیں پس اس واسطے رقبہ $\text{ط} + \text{ری} = \text{س}$ $\text{ص} + \text{ط} = \text{س}$ کہ
 اس رقبہ کے اوس حصہ کا رقبہ جو قطع مدور ہی کہ طاص ہی دو شکر کو تفریق کو تو ہموکہ وہ
 حاصل ہوگا کہ تدویر مدیر کی قوس اور دائرہ ساکن کے درمیان واقع ہے اور یہ قوس
 ایک قرن سے متصل کے قرن تک پہنچ گئی ہے اور دائرہ ساکن وہ ہی جبیر دائرہ
 مشترک گردش کرتا ہے پس حاصل یہ ہے کہ
 کہ $\text{ط} + \text{ری} = \text{س}$

اور علی بن القیاس تدویر دیر داخل میں بھی وہ رقبہ دریافت ہو سکتا ہی ہو دائرہ سکین
اور خط منحنی حصہ کے درمیان واقع ہو اور یہ حصہ ایک قرن کے دو سو کر قرن تک کچا گیا
اگر طبر ارض سے ہو تو نتیجہ یہ حاصل ہوگا
کہ ص (۳۲ طبر ۲ ص)

خط منحنی اور اس کے لف کے درمیان کا رقبہ

(۱۵۷) دفعہ ۱۱ کی شکل میں اگر ہم رسی کو یا خط CC کو فرض کریں کہ وہ چھو سے زاویہ Δ سر پر حرکت کرتا ہے تو خط کے دو مقامات اور خط منحنی CC کے درمیان جو شکل ہو گے آخر کو اسے ایک قطعہ دائرہ خیال کر سکتے ہیں اس واسطے اس کا رقبہ ΔCC سر ہوگا اس میں $CC = CC$ پس اگر Δ اس کل رقبہ کو تعبیر کرے

سطح بیرونی کے قریب

نقطہ سطحی مستوی اور

جو خط منحنی اور اس کے لخت اور دو نصف قطر دائرے کے برابر گیا ہے اور یہ نصف قطر دائرے

موافق سر اور سر کے قیمتوں کے لئے گئے ہیں تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$1 = \frac{1}{2} \text{ سر } + \frac{1}{2} \text{ سر } \quad \text{چونکہ} \quad \frac{1}{2} \text{ سر} = \frac{1}{2} \text{ تو اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ}$$

$1 = \frac{1}{2} \text{ مع } + \frac{1}{2} \text{ ق } + \frac{1}{2} \text{ ز صو}$
حدود غائی صو کی ہیں مگر کی حدود غائی معلوم کے موافق لگی ہیں یا ہم اس صورت قانونی کو
اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$1 = \frac{1}{2} \text{ مع } + \frac{1}{2} \text{ ق } + \frac{1}{2} \text{ ز صو} \quad (158) \quad \text{اوپر کی دفعہ کا عمل خط مجمل پر کرو}$$

$$\begin{aligned} \text{ہاں صو} &= \text{س س سر} \text{ بوجب دفعہ } 109 \\ \text{اسو } \frac{1}{2} \text{ ق} &= \text{س ق } + \frac{1}{2} \text{ سر } = \frac{1}{2} \text{ سر } + \frac{1}{2} \text{ سر } \\ \text{مع } \frac{1}{2} \text{ سر } &= \text{س سر} + \frac{1}{2} \text{ سر } + \frac{1}{2} \text{ سر} \end{aligned}$$

پس 1 معلوم ہو گیا

منحنی مواقع العمود کا رقبہ

(159) فرض کرو کہ سطح مستوی خط منحنی میں اس کے پاس کچے جائیں اور کسی ایک ہی نقطہ
عمود ان پاسوں پر نکالیں جائیں تو ان مواقع العمود کے نقطوں کے جو خط منحنی بنا ہی اس کو
منحنی مواقع العمود کہتے ہیں اور جس نقطہ سے عمود نکالے گئے ہیں اس کو سید مواقع کہتے ہیں
اور خط منحنی جسے کہ منحنی مواقع العمود پیدا ہوا ہے منحنی اولی کہلاتا ہے ہم غائب منحنی اولی
اور منحنی مواقع العمود کے بعض ارتباط کا بیان کیا ہے دفعات 9-93 تک
دیکھو اب ہم ایک دعویٰ مختلف خطوط منحنی مواقع العمود کے رقبوں کے باب میں بیان کرتے ہیں
اور مختلف خطوط پہلی سطح پیدا ہوتی ہیں کہ خط منحنی اولی ایک ہی اور سید مواقع بدلتا رہتا ہے

خط منحنی مواقع العمود کے رقبہ سے وہ رقبہ مراد ہے جو ایک عمود اس طرح پیدا کرتا ہے جس طرح

کہ نقطہ تماس منحنی اولیٰ کی قوس معلوم پیدا کرتا ہے

(۱۶۰) خطوط مواقع العمود جن کا رقبہ معلوم ہے اوکلی بدو تراش مخروطی میں واقع ہوتے ہیں اور

تراش مخروطی کا مرکز وہی رہتا ہی خواہ رقبہ معلوم کی کچھ ہی مقدار ہو

فرض کرو کہ او اس رقبہ کو تعبیر کرتا ہی جو خاص بدو مواقع طے ہوا اور او اس قب کو تعبیر کرتا جو بدو مواقع

محدودین قطبیہ نق اور بلجاط ط کے ہیں اور خط منحنی اولے کے کسی تماس پر جو عمود ط

سے نکلا جائے اس سے تعبیر کرو اور اسے تماس پر ط سے جو عمود نکلا جائے اس کا

طول ع ہے اور فرض کرو کہ سرزاویہ درمیانی ان عمودوں اور خط ابتدائی قائم کا ہے

تو دفعہ ۷۰ کی طرح

$$1 = \frac{1}{2} \text{ مع ع زسر اور } 1 = \frac{1}{2} \text{ مع ع زسر}$$

کلیان حدود غائی معین کے درمیان لیجائیں

اب ع = ع - لی جم (سر - بر) اس واسطے

$$1 = 1 - \frac{1}{2} \text{ مع ع لی جم (سر - بر) } + \frac{1}{2} \text{ مع لی جم (سر - بر) زسر} \dots (1)$$

فرض کرو کہ لد = لی جم بر اور ۰ = لی جب بر تو

$$1 = 1 - (ھه لد + ک ر) + ل لد + ۲ م لد + ن ۰ \dots (2)$$

اس میں ھه اور ک اور ل اور م اور ن خاص تقادیر ہیں جو ط کے ہر مقام پر مستقل رہتے ہیں

اب (۲) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مقام النقاط (لدی) کا مطابق قیمت ۱ کے تراش مخروطی

ہے اور تراش بہاء مخروطی ۱ کے مختلف قیمتوں کے مقرر کرنے سے متحدہ مرکز پیدا ہوتے ہیں

تراش مخروطی اکثر بیضوی ہوگی اس واسطے کہ ل اور م اور ن کی قیمتوں کے مندرجہ ذیل سے

ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے

$$م - ل = ن = [\text{مع جب بر سر بر}] - [\text{مع جم بر سر بر}] \times [\text{مع ح سر زسر}]$$

خطوط منحنی مستوی اور ۱۲۷ سطح بیرونی کے رقبے

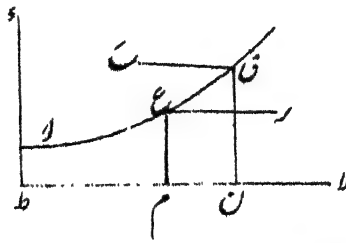
اور یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ بائیں طرف کا جملہ منفی ہے باب چہارم کی ۲۱ مثال دیکھو
اسے معلوم ہو کہ موجب باب سیزم ہندسہ بالجو تر اشش مخروطی بیضوی ہے
اگر تر اشش مخروطی کا مرکز سید ہو تو اول درجہ کی رقبہیں لا اور وہ ہے مساوات (۱)
غائب ہو جائیگی پس اسطرح بالواسطہ یہ معلوم ہوتا کہ کوئی مبدعہ واقع ہی ایسا ہی کہ
جس پر $h = 0$ اور $k = 0$ فرض کرو کہ یہ مبدعہ بجاط کے مقرر کیا جائے تو
یہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$l = 1 + \frac{1}{2} \text{ مع لیا جم (سر - بر) زبر}$$

اور دوسری رقبہ بائیں طرف مثبت ہی اور لا ضرور بڑا نسبت ل کے ہی پس مبدعہ
ایسا ہی کہ رقبہ مواقع العمود کو نہایت کم بناتا ہے
ایک خاص صورت میں جس کے اندر خط منحنی او کے احاطہ کیا ہوا خط منحنی ہو تو تر اشش مخروطی
دائرہ ہو جائیگی اس واسطے کہ سر کی حدود غائی۔ اور کہ کے درمیان فرض کی گئی ہے پس
اسے یہ حاصل ہوتا ہے $l = n$ اور $m = 0$

خط او کے پر نقاط خاص کے موجود ہونے کا اثر اب ہم بیان کرتے ہیں اس صورت میں یہ
واقع ہو سکتا ہے کہ سر ہمیشہ کلیوں کی ادنی حد کے اعلیٰ حد تک زیادہ نہ ہو بلکہ بعض اوقات
زیادہ ہو اور بعض اوقات کم ہو مثلاً اب فرض کرو کہ سر اول۔ سے $\frac{1}{2}$ کہ تک زیادہ
ہوتا ہے اور $\frac{1}{2}$ کہ سے $\frac{1}{2}$ کہ تک کم ہوتا ہے اور $\frac{1}{2}$ کہ سے $\frac{1}{2}$ کہ تک زیادہ ہوتا ہے
قیمتیں ہر دو کم و بیش کی وہی ہو گئیں جو اس حالت میں ہوئیں کہ سر ہمیشہ۔ سے $\frac{1}{2}$ کہ
تک زیادہ ہوتا پس جو رقبہ خط منحنی مواقع العمود کا مرثم کیا گیا ہے وہ اس حالت میں کہ
 $\frac{1}{2}$ کہ سے $\frac{1}{2}$ کہ تک سر گھٹتا ہے منفی مقدار شمار کیا جائیگا

نسطح مستدیر قائم الزاویہ صورت قانونیہ



(۱۶۱) فرض کرو کہ خط منحنی $ا ب$ پر ایک نقطہ معین $ا ب$ ہے اور نقطہ $ع$ کے محدودین $لا$ اور $س$ میں اور قوس $ا ب$ کا طول صوبہ $ا ب$ اور خط منحنی محور $لا$ کے گرد چکر کھاتا ہے اور $ا ب$ کے چکر کھانے سے جو سطح متدیر پیدا ہو اس کے رقبہ کو $ص$ سے تعبیر کرو تو بموجب علم الجبر $ا ب$ کے دفعہ ۳۱ کے

یصے = $ا ب$ کے $ص$

اس واسطے $ص$ = مع $ا ب$ کے $ص$ (۱)

پس $ص$ = مع $ا ب$ کے $ص$ (۲)

اور $ص$ = مع $ا ب$ کے $ص$ (۳)

ان تین صورتوں میں سے جس صورت سے مطلب برآین تسہیل اور آسانی ہو اسے اختیار کرو اگر $ا ب$ باسانی ارقام صومین بیان ہو جائے تو (۱) کو کام میں لانا چاہئے اگر $ا ب$ باسانی سی ارقام $ا ب$ میں بیان ہو تو (۳) کو کام میں لانا چاہئے لیکن اکثر صورتوں میں مطلب برآری میں تسہیل اس میں ہوگی کہ $ا ب$ اور $ص$ کو ارقام $لا$ میں بیان کریں اور (۲) کو کام میں لائیں

ہر صورت میں رقبہ $ا ب$ کا جو خط منحنی کی کسی قوس کی حرکت سے پیدا ہوا اور یہ قوس نقاط معینہ کے درمیان واقع ہو اس طرح دریافت ہوگا کہ حدود غائی مخصوص کے درمیان کلاں (۱۶۲) اسطوانہ پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ خط مستقیم متوازی محور $لا$ کے گرد محور $لا$ کے چکر لگائی تو اس سطح استو متدیر قائم پیدا ہوگا اور فرض کرو کہ خط متحرک کا محور $لا$ سے فاصلہ $ط$ ہے

تو $\epsilon = ط$ اور $\frac{ط}{\epsilon} = ۱$

پس بموجب مساوات (۲) دفعہ ۱۴۱ کے

$$ص = ۲ \text{ کہ مع } ط \text{ زلا} = ۲ \text{ کہ ط} + لا + س$$

فرض کرو کہ خط متحرک کے اوس حصہ کی اطراف کے جو متحرک ہوتا ہے محدود لا اور لا بہتہ
توسط جو پیدا ہوگی

$$۲ \text{ کہ ط} + لا مع لا = ۲ \text{ کہ ط} (لا - لا)$$

(۱۴۳) مخروط پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ ایک خط مستقیم جو مبدا میں گذرنا ہی اور محور لا پر سیلان راویہ سے کار کہتا ہے
محور لاس کے گرد چکر لگائی توسط مسند پر مخروطی پیدا ہوگی کہ

$$\epsilon = لاس \text{ سے اور } \frac{ط}{\epsilon} = \text{قطر سے}$$

پس مساوات (۲) دفعہ ۱۴۱ سے

$$ص = ۲ \text{ کہ مع } مس \text{ سے قطر سے لا زلا} = ۲ \text{ کہ مس سے قطر سے لا} + س$$

اسی معلوم ہوا کہ اس سے لا اور لا کے فاصلہ پر سطح نے جو عمود محور پر ہوں مخروط
تراشا جائے توسط مسند پر مخروط ناقص کا قہ کہ قم سے لی سے

(۱۴۴) کرہ پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ مساوات $\epsilon = ط - لا$ سے دائرہ معلوم ہوتا ہے اور وہ محور لاس کے گرد
دور کرتا ہے تو یہاں

$$\frac{ط}{\epsilon} = - \frac{لا}{\epsilon}$$

$$\text{اور } \frac{ط}{\epsilon} = \sqrt{\left(1 + \frac{لا}{\epsilon}\right)} = \sqrt{\left(1 + \frac{لا}{\epsilon}\right)} = \frac{ط}{\epsilon}$$

اسی معلوم کہ مساوات (۲) دفعہ ۱۴۱ کی موافق

$$ص = ۲ \text{ کہ مع } ط \text{ زلا} = ۲ \text{ کہ ط} + لا + س$$

پس سطح مستدیر چوادر سطح کے درمیان کہ لا = لا اور لا = لا سے شخص ہوتی ہیں
کہ ط (لا - لا)

ہی اسی ثابت ہوا کہ رقبہ منطبقہ کرہ کا موقوف منطبقہ کے ارتفاع اور کرہ کے نصف قطر ہوتا ہے
اور وہ برابر اس رقبہ کے ہوتا ہے چوادر سطح سے کسی کہ منطبقہ کو احاطہ کی ہوئی ہیں اس
اسطوانہ سے قطع کرتی ہیں کہ جسکا محور سطح مستوی پر عمود ہے اور وہ خود کرہ کے اوپر بنا ہوا ہے
پس سطح مستدیر کل کرہ کی کہ ط ہے یہ نتائج بڑے مہتم بانان ہیں
(۱۶۵) کرہ بیضوی پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ بیضوی معلوم ط + ص = لا = ط ص محور لا کے گرد چکر لگائی اور محور
منطبق بیضوی کے محور کلاں پر فرض کیا جائے تو یہاں

$$\frac{ز}{لا} = \frac{ص}{لا} - \frac{ص}{لا} \quad \text{اور} \quad \frac{ز}{لا} = \frac{ص}{لا} + \frac{ص}{لا} = \frac{ص}{لا} (1 + \frac{ص}{لا})$$

اسی معلوم ہوا کہ مساوات (۲) دفعہ ۱۶۱ میں

$$\frac{ص}{لا} = \frac{ص}{لا} (1 + \frac{ص}{لا}) \quad \text{ص} = \frac{ص}{لا} (لا + ص) \quad \text{ص} = \frac{ص}{لا} (لا + ص)$$

اب کلی کے یعنی بین لاکہ حد و غائی اور ط لیں تو سطح مستدیر چوادر بیضوی کی حرکت سر پیدا ہو
حاصل ہو جائیگی اسی یہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ص}{لا} = \frac{ص}{لا} (1 + \frac{ص}{لا}) + \frac{ص}{لا}$$

(۱۶۶) دو سری مثال کے واسطے فرض کرو کہ

$$\frac{ص}{لا} = \frac{ص}{لا} (1 + \frac{ص}{لا})$$

محور لا کے گرد چکر لگاتا ہے

یہاں اگر اس نقطہ سے جہاں لا = کے تلاش کریں نوصو = ص (ص - ص) بیوجہ دفعہ ۱۶۱ کے

پس ہم دیکھتی ہیں کہ $ص + س = ص$ اس صورت میں دفعہ ۱۴۱ کے تینوں صورتوں کا نو بنہ
میں جسکو چاہیں کام میں لائیں لیکن (۲) کے استعمال میں آسانی ہوگی
(۱۴۶) فرض کرو کہ ایک خط منحنی کی مساوات $ص = ح$ (۱۱) ہی اور دوسری کی مساوات
 $ص = ص$ (۱۱) ہے اور دونوں خط منحنی محور لاکے گرد چکر لگاتے ہیں اور جو تینوں کہ نقاط مابین
سے دونوں خط منحنی میں اس نقطہ تک پائش ہوتی ہیں جسکا محدود ہے اسکا طول ص اور
صوم میں اور مبدی سے لا اور لام کے فاصلوں پر جو دو سطحیں عمود محور لا پر ہوں ان کے
درمیانی سطوح کے رقبوں کے مجموعہ کو مرتبہ کرتا ہے تو بموجب دفعہ ۱۴۱ کے

$$ص = ۲ \text{ کہ لا } [ح (۱۱) \frac{ز صوم}{ز لا} + ص (۱۱) \frac{ز صوم}{ز لا}] \text{ ز لا}$$

ایک تہاں صورت یہ فرض کرو کہ ہر ایک خط منحنی ہی جو خط مستقیم $ص = ط$ سے نصف ہوتا ہے
پس $ص = ط + ص$ (۱۱) فرع بالا کے واسطے اور $ص = ط - ص$ (۱۱) کے فرع پائش کے لئے

$$\frac{ز صوم}{ز لا} = \frac{ز صوم}{ز لا}$$

اور $ص = ص$ کہ لا $\frac{ز صوم}{ز لا} = ص$ کہ ط مع $ز صوم$

حدود غائی صوم کی موافق لاک کی حدود غائی کی لی گئی ہیں

اسی معلوم ہوا کہ اگر کسی کمال خط منحنی ہی اور ایک خط مستقیم سے نصف ہوتا ہے اور ایک محور کے گرد

چکر لگاتا ہے اور یہ محور پہلے خط سے ط کے فاصلہ پر واقع ہے اور خط منحنی کو قطع نہیں کرتا

تو کل سطح مستوی جو پیدا ہوگی اسکا رقبہ برابر ہوگا حاصل ضرب طول خط منحنی اور ط کے

مثلاً فرض کرو کہ دائرہ مساوات

$$(۱۱ - ص) + (ک - ۲) - س = -$$

سے معلوم ہوتا ہے یہاں رقبہ کل سطح مستوی جو محور لاکے گرد دائرہ کے چکر کہانہ سے پیدا ہوتا ہے

۲ کہ ک ۲ کہ س ہوگی

اس مثال میں کچھ وقت نہیں کہ سطح مستوی کے دونوں حصوں کو جدا جدا دریافت کریں

خط منحنی بنو اور ۱۳۲

اس واسطی کہ خط مستقیم = ک کے اوپر کے حصہ پر ہم کو حاصل ہوتا ہے یعنی کہ ۲ کہ مع ۲ صو

$$۲ کہ مع [ک + ۱] - [سن - (لا - صہ)] ز صو$$

یعنی ۲ کہ مع ک ز صو + ۲ کہ مع ۱ [سن - (لا - صہ)] ز صو

ان کلیوں میں سے اول ۲ کہ صو اور دوسری کلی برابر

$$۲ کہ مع ۱ [سن - (لا - صہ)] ز صو$$

اور اسکی تحویل ۲ کہ مع سن ز لا یعنی ۲ کہ سن کروا اسی معلوم ہوا کہ صورت بیانہ ۲ کہ ک صو + ۲ کہ سن لا سے مناسب حدود غائی کی درمیان سطح مطلوب بغیر ہوتی ہے

سطح مستدیر کا رقبہ قطبی صوفانونیہ

(۱۴۸) بعض اوقات ہمیں سانی ہوتی ہے کہ قطبی محدود کا استعمال ہو تو دفعہ ۱۴۱ سے

یہ استنباط ہوتا ہے کہ

$$ص = ۲ کہ ز صو = ۲ کہ ز صو ز صو = مع ۲ کہ لقی جب ۲ کہ ز صو ز صو$$

$$اسمیں ز صو = [۱ + (ز صو)]$$

(۱۴۹) منحنی صو بری پر دفعہ مذکور کو کام میں لاؤ

$$بیان لقی = ط (۱ + جم بر) مس$$

$$ز صو = ط [۱ + جم بر] جب ۲ کہ صہ = ط (۲ + جم بر) = ۲ ط جم ۲ کہ$$

اس واسطی

$$ص = ۲ کہ ط مع (۱ + جم بر) جم ۲ کہ جب ز صو = ۱۴ کہ ط مع جب ۲ کہ جب ۲ کہ ز صو$$

$$= \frac{۳۲ کہ ط جم ۲ کہ}{۴ + ۳}$$

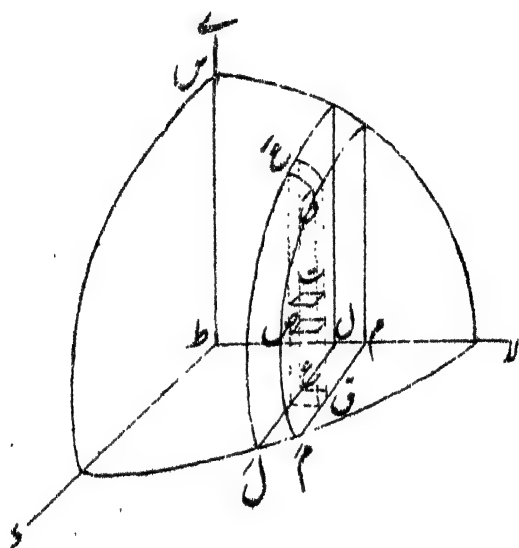
کلی میں سر کی حدود غائی اور ک کے لیتو سے وہ سطح مستدیر معلوم ہو جائیگی جو

خط ابتدائی پر کامل خط منحنی کے چکر گانے سے پیدا ہوں گے یہ

$$۳۲ کہ ط حاصل ہوتا ہے$$

سطح بیرونی اور کلی ثناء

(۱۰۰) فرض کرو کہ کسی سطح کے نقطہ کے لا اور ۵ اور ۵ سے محدود ہیں اور لا + ۵ لا اور ۵ + ۵ اور ۵ سے محدود ہیں متصل کے نقطہ ق کے ہیں



ایسے $\frac{ز}{لا}$ اور $\frac{ز}{ز}$ مساوات معلوم سطح بیرونی سے دریافت ہو سکتے ہیں
 اب رقبہ $ع ق$ کا Δ Δ ہی اسی معلوم ہوا کہ محسبات کے علم ہندسہ کے موافق
 سطح کہ $ع$ پر $س$ کرتی ہے اور جب کا $طلہ ع ق$ ہے اس کی جزئی ترکیبی کا رقبہ Δ Δ فقط $ل$ ہے
 اب ہم فرض کریں گے کہ رقم Δ Δ فقط $ل$ کے متماثل جو ارقام ہیں ان کے مجموعہ کے حد غائی
 موافق $لا$ اور $کے$ تمام قیمتوں کے جو حدود غائی محبت کے درمیان واقع ہیں رقبہ سطح
 بیرونی کا موافق ان حدود غائی کے ہے اس سطح کو صر سے تعبیر کرو تو

$$\text{صر} = \text{مع} \text{ ما} (1 + \frac{ز}{لا} + \frac{ز}{ز}) [\frac{ز}{لا}] \text{ ز لازم}$$

ن کی حدود غائی موقوف سطح بیرونی کے حصہ مذکور پر ہے
 (۱۴۱) دفعہ مذکور میں جو بات فرض کی ہے اس کی حقیقت سمجھنے کے لئے طالب علم کو چاہیو کہ
 وہ علم حساب الجبریات کی دفعہ ۳۰۸ کو دیکھو
 (۱۴۲) اگر $ع$ پر دفعہ مذکور کا عمل کرو
 فرض کرو کہ $ک$ $ک$ جبکی مساوات

$$لا + ز + ع = ط$$

ہے اس کے اٹھویں حصہ کی سطح مستدیر دریافت کرنی ہے

$$\text{یہاں } \frac{ز}{لا} = - - \frac{ع}{لا} \text{ اور } \frac{ز}{ز} = - - \frac{ع}{ز}$$

پس $\text{صر} = \text{مع} \text{ ما} (1 + \frac{لا}{لا} + \frac{لا}{ز}) \text{ ز لازم} = \text{مع} \text{ ما} (لا - لا - ز)$
 اب شکل میں فرض کرو کہ $ط$ $لا$ اور $ل$ کو بجائی $م$ کے رکھو تو
 $\text{م} = \text{ما} (ط - لا)$ اس واسطے کہ مساوات سطح بیرونی میں $س =$ کے فرض کرنے پر
 قیمت $م$ کی حاصل ہوتی ہے اب اگر ہم بلحاظ $ک$ کے کلی حدود غائی اور $ک$ کے درمیان لین
 نوہم کو چاہی کہ تمام اجزاء ترکیبی کا مجموعہ لین جو اس قطعہ میں واقع ہے جس کا $طلہ ل$ $م$ $م$
 سطح (لاؤ) پر ہے اب

سطح بیرونی کے نسبت

خطوط منحنی سے اور

۱۳۵

$$\text{جمع} = \frac{\text{ز} - \text{ط}}{(\text{ز} - \text{ط})} = \frac{\text{ز}}{(\text{ز} - \text{ط})} = \frac{\text{ز}}{\text{ط}}$$

پس صر = کپٹ مع زلا

اگر ہم کلی بلحاظ لاکے سے ط تک لین تو ہم تمام اون قطعات کو جمع کریں جو اس سطح بیرونی میں واقع ہیں کہ جس کا ظلہ ط لا ہے پس کپٹ نتیجہ مطلوب ہے

اسو اسے کل سطح مستدیر کردہ کی ہم کہ ط ہے

اگر ہم بلحاظ لاکے اول کلی لین تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{صر} = \frac{\text{ط} - \text{ز}}{(\text{ط} - \text{ز})} = \frac{\text{ط}}{\text{ز}}$$

$$\text{اسمین لا} = \frac{\text{ط} - \text{ز}}{(\text{ط} - \text{ز})}$$

ایک اور مثال یہ ہے کہ سطح بیرونی کے اس حصہ کا رقبہ دریافت کرو اس واسطے معلوم ہوتا ہے

$$\text{نئے} + (\text{لاجم سم} + \text{وجب سم}) - \text{ط} =$$

محدودین کے مثبت خانوں میں واقع ہے یہ سطح مستدیر سطوانہ دور قائم کی ہے

اور اس کا محور خط مستقیم ہی جو ہے = اور لاجم سم + وجب سم = سے تحقیق ہوتا ہے

اور ط نصف قطر دور قطعہ کا ہے یہاں

$$\frac{\text{ز}}{\text{ط}} = \frac{\text{جم سم} (\text{لاجم سم} + \text{وجب سم})}{\text{سم}}$$

$$\frac{\text{ز}}{\text{ط}} = \frac{\text{جب سم} (\text{لاجم سم} + \text{وجب سم})}{\text{سم}}$$

ط ز لا ز

$$\text{صر} = \frac{\text{مع مع} - \text{مع مع}}{(\text{ط} - \text{لاجم سم} + \text{وجب سم})}$$

پس محدود سطح (لاوی) سطح بیرونی کو خط مستقیم ط = (لاجم سم + وجب سم) پر قطع کرتی ہے اگر اوپر کی علامت لین تو خط مستقیم سطح (لاوی) کے مثبت ربع میں واقع ہوگا

صر کی قیمت دریافت کرنے کے لئی ہم اول بلحاظ ی کے احد و دغائی ی = اور

$$\text{ز} = (\text{ط} - \text{لاجم سم}) \text{قم سم کے لینے میں اب}$$

$$\text{مع} = \frac{(\text{ط} - \text{لاجم سم} + \text{وجب سم})}{\text{ط}} = \frac{\text{لاجم سم} + \text{وجب سم}}{\text{ط}}$$

اسکو حدود غائی مبین کے درمیان لو تو بہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{1}{2} \text{ جب } (کے - جب) \text{ لاجم } (کے)$$

$$\text{اسو اسطی سر} = \frac{1}{2} \text{ جب } (کے - جب) \text{ لاجم } (کے) \text{ زلا}$$

اور حدود غائی کلی کی اور حجم سے میں اسے ہم کو دریافت ہوگا کہ

$$\text{سر} = \frac{1}{2} \text{ جب } (کے - جب)$$

(۱۴۳) بہہ بابتہ تلمانی کے قابل ہے کہ دو مختلف سطوح بیرونی میں اجزاء مرکبہ نظر

$$\text{متساوی ہو سکتے ہیں مثلاً سطح } ۲ = ۱ = ۱ + ۱$$

اور $۱ = ۱ = ۱$ سے تشخیص ہوتی ہیں اونہیں بر صورت میں

$$\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$$

یو اگر حساب نے بہر بہت بحث لگی ہی اور انہوں نے اپنے سطح کا نام سطح متفقہ رکھا ہے

بہ سطح بیرونی متفقہ ہیں کہ

$$\text{محروط } (کے - ۱) = (۱ - ۱) + (۱ - ۱) \text{ میں سر}$$

$$\text{اور سطح بنسٹ لاجم } ۱ + ۱ = ۱ = ۱$$

اور بہ سطح بیرونی جو اون مساواتوں سے تحقیق ہوتے ہیں متفقہ ہیں

$$۲ = ۱ + ۱$$

$$۲ = (۱ - ۱) + (۱ - ۱) \text{ میں سر}$$

$$۲ = (۱ + ۱) - (۱ - ۱) \text{ میں سر}$$

$$۲ = (۱ - ۱) + ۱ = ۱ \text{ میں سر}$$

اسمیں سطح (بر) حیلہ بر کا ہے اور سطح لاکا ہے اور

$$۲ = ۱ - ۱ = ۱ \text{ میں سر}$$

سے تشخیص ہوتا ہے

(۱۴۴) سطح بیرونی کے کسی نقطہ پر سطح مناسہ کا ظلہ جو قائم الزاویہ Δ لا Δ دے لیتے ہیں
اوسکی جگہ ایسے سطح لین کہ جب کا ظلہ قطبی جزیرہ کی ہی Δ سر Δ ہی ہو
تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{سر} = \text{مع} + \text{قط لمرق بز برزق}$$

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو رقبہ سطح بیرونی لا Δ = طے کا دریافت کرنا ہے

اور یہ سطح لا Δ = س سے قطع ہوئی ہے یہاں

$$\text{قط لمر} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ط}} + \frac{\text{س}}{\text{ط}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{لا} + \text{ط}}{\text{ط}} \right) \quad \text{کیونکہ لا} + \text{س} = \text{ط}$$

$$\text{بس سر} = \text{بکمع} + \text{مع} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{لا} + \text{ط}}{\text{ط}} \right) \text{ لی زبر بزق} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{س} + \text{ط}}{\text{ط}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\text{ط}}{\text{ط}} \right)$$

(۱۴۵) فرض کرو کہ لا Δ = لی جب برج سر اور Δ = لی جب برج سر اور Δ = لی جب برج سر اور Δ = لی جب برج سر
بس لی اور برابر اور قطبہ محدود کسی نقطہ کے سطح میں ہیں تو ہم بعد ازین ثابت کرینگے کہ مساوی

$$\text{سر} = \text{مع} + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ط}} + \frac{\text{س}}{\text{ط}} \right) \quad \text{زلا زو}$$

کی بہت بدل کر یہ مساوات بن سکتی ہے کہ

$$\text{سر} = \text{مع} + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ط}} + \frac{\text{س}}{\text{ط}} \right) \quad \text{لی زبر بزق}$$

اثبات ہندسہ ہی ہکا بعض کتابوں لکھا ہی اور یہ ہی یاد رکھنا چاہئے کہ اس صورت
فانونہ لی = $\frac{1}{2} \left(\frac{\text{لا} + \text{س}}{\text{ط}} \right)$ میں دفعہ $\frac{1}{2}$ میں لی تعبیر $\frac{1}{2} \left(\frac{\text{لا} + \text{س}}{\text{ط}} \right)$ ہوا

(۱۴۶) فرض کرو کہ وجہ لا کا ہے اور سطح Δ زلا مطلوب ہے اگر غیر محدود کلی مع Δ زلا کے

معلوم ہونے فوراً محدود کلی معلوم ہو جائیگی اور اگر غیر محدود کلی بھول ہو تو یہی تقریبی قیمت
محدود کلی کی معلوم ہو سکتی ہے اس عمل تقریب کی تشریح سطح سے خوب ہوتی ہے کہ وہ تو

میں کسی خط منحنی کا فرض کریں تو سطح Δ زو ایک خاص رقبہ کو تعبیر کریگا س - ط کو
ایسے ن برابر حصوں میں تقسیم کرو کہ ہر ایک حصہ ہو اور ابتدای انتہای حصوں کے درمیان

ن - ۱ حصوں برابر برابر فاصلوں پر کچھ اور حصوں کو Δ اور Δ ... میں اور Δ ... میں تعبیر کرو

پس اب ہم یہ مقرر کر سکتے ہیں کہ

$$\text{نہ} (۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + \dots + n^2)$$

رقبہ مطلوب کی تقریبی قیمت ہے

$$\text{یا} \text{نہ} (۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + \dots + n^2)$$

تقریبی قیمت ہے

اور ایک اور طرح سے بھی تقریبی قیمت حاصل کر سکتے ہیں کہ روین اور ر + ۱ اور بینوں کے اطراف میں خط ملائیں نو ایک ذوزنقہ بن جائیگا جسکا رقبہ $(۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + \dots + n^2)$ ہوگا اور

ایسی سطح ذوزنقہ کے مجموعہ سے تقریبی قیمت

$$\text{نہ} \left[\frac{1}{6} + ۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + \dots + n^2 + \frac{1}{6} \right]$$

رقبہ مطلوب کی حاصل ہوگی

نفس الامر میں یہ ماحصل مجموعہ پہلی دو ماحصل کا ہے یہہ ہی ظاہر ہے کہ ن کو کافی بڑا کر

تقریبی قیمت کو جتنا قریب جابین لا سکتے ہیں

ایک اور ترکیب تقریبی قیمت کے حاصل کرنی کی یہہ ہے کہ فرض کرو ایک قریب البیضوی

مترسم ہو جسکا محور متوازی محور کے ہو اور ۱ اور ۴ مساوی الابعاد معین ہیں

اور ۱ اور ۴ کے درمیان بعد صہ ہی اور ۱ اور ۴ کے درمیان ہی ہی بعد ہوگا

تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ قریب البیضوی اور محور لا اور دو طرف کے معینوں کے درمیان رقبہ

$$\text{ہے} (۱ + ۴ + ۹ + ۱۶ + ۲۵ + \dots + n^2)$$

ہے اور یہ شکل سے تو بہت آسانی سے ثابت ہوتا ہے کیونکہ اس قتبہ میں ایک ذوزنقہ

اور ایک قطعہ قریب البیضوی ہے اور اسکا رقبہ دفعہ ۱۴ کے موافق دریافت ہو سکتا ہے

اب فرض کرو کہ ن جفت ہی تو رقبہ جسکا تخمینہ کرنا مطلوب ہے جفت گروں میں تقسیم ہوگا

پس اول دو ٹکڑوں کے معینوں کو فرض کرو کہ

$$\frac{30}{8} = (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15)$$

یہہ حاصل جناب نیوٹن صاحب نے لکھا ہے

دفعہ ۴ کے اختریان کے مطابق عمل کرنے سے ہم کو یہ قدر تقریبی رقبہ کے دریا کرنا معلوم ہوگا کہ کل رقبہ کی ایسی برابر حصوں میں تقسیم کرو کہ اختلاف تین کا ہو اور اول معین اور آخر معین کو جمع کرو اور متبیری معین کو باسٹنا اول اور آخر کے باہم جمع کر کے دو چند کرو اور باقی اور معینوں کے مجموعہ کا سہ چند لو اور یہ ان مجموعوں کو یکجا کر کے حاصل کو معینوں کے بعد مشترک کے تین اٹھویں حصہ میں ضرب دو

امثلہ

(۱) اگر محمل اور محور ۱۱ اور قوس صو کے ایک طرف کے معین کے درمیان جو رقبہ واقع ہو وہ اسے تقریباً ثابت کرو کہ $1 = 1$ جس جو قوس صو خط منحنی کے سب سے نیچے کے نقطہ سے شروع ہوتی ہے

(۲) خط منحنی

$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

کا کل رقبہ $\frac{1}{2}$ کہ خاص ہی (کلی ۱) = حجم سر کے مقرر کرنے سے بھی نکال سکتی ہیں

(۳) خط منحنی ۱ (۱ + ۲) = ۳ (۲ - ۱) کا ۱ = ۱ سے ۱ = ۱ تک رقبہ

$$3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ لوگ } 2 \text{ ہے}$$

(۴) خط منحنی ۱ = ۱ = ۲ (۲ - ۱) اور اسکے متغیہ الماقات کے درمیان کل رقبہ دریافت کرو حاصل ۲ کہ ۲

(۵) خط منحنی ۱ (۱ + ۲) = ۲ (۲ - ۱) اور اسکے متغیہ الماقات کی درمیان کل رقبہ دریافت کرو

حاصل ۲ کہ ۲

(۶) خط منحنی ۱ = ۱ (۱ + ۲) کے متغیہ رقبہ دریافت کرو

(۷) خط منحنی ۲ = $\frac{لا (ط + لا)}{ط - لا}$ اور خط ممسح الملاقات لا = ط سے جو رقبہ محدود ہو

اور سے دریافت کرو اور حلقہ طریقی خارج ہے۔ حاصل ۲ ط (۱ + کچھ)

(۸) خط منحنی ۲ = لا اور او کے ممسح الملاقات کے درمیان کل رقبہ دریافت کرو

حاصل ۳ ط

(۹) خط منحنی (۱ - لا) = ط - لا کا کل رقبہ دریافت کرو حاصل ۳ ط

(۱۰) خطوط منحنی ۲ = ۴ ط لا = لا اور لا = ۴ ط د = ۰ کے درمیان جو رقبہ واقع ہوا وہ دریافت کرو

حاصل ۱۴ ط

(۱۱) خط منحنی ۲ = ۲ ص لا = ط ص لا کا کل رقبہ دریافت کرو

حاصل ۴ ط ص

(۱۲) خط منحنی ۲ = لا (ط - لا) کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو حاصل ۴ ط

(۱۳) خط منحنی جس کا مماس ایک خط معلوم کی برابر ہوتا ہے اور کے اور محور اور خط ممسح الملاقات

کے ۲ کے درمیان جو رقبہ واقع ہوا وہ کو دریافت کرو (دفعات ۱۰۰ و ۱۳۴ دیکھو)

(۱۴) خط منحنی ۲ = لا (ط + لا) = لا (ط - لا) کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

حاصل ۲ ط (۲ - ک)

(۱۵) خط منحنی ۱۴ ط ۲ = ص لا (ط - لا) کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو حاصل ۱۴ ط

(۱۶) خط منحنی ۲ = لا (ط + لا) = لا (ط - لا) کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

حاصل ط [۳ ط - (۲ + ۱) لوک ۲]

(۱۷) خط منحنی ۲ = لا (ط + لا) - ۴ ط لا (ط - لا) + لا (ط - لا) کا کل رقبہ دریافت کرو

حاصل ط (۲ - ۳ ط)

(۱۸) رقبہ خط منحنی د = ص جب ۱/۲ لوک جب ۱/۲ کا

۱ = ۰ سے لا = ط کہ تک رقبہ دریافت کرو حاصل ۲ ط ص (۲ - لوک ۲)

(۱۵) خط منحنی کی $\left(\frac{1}{2}\right)$ کا رقبہ درمیان $لا = ۳$ اور $لا = ۳$ کے درمیان کہ جو اور حاصل کر رقبہ بعید البینسوی $لا = ۲$ کا انہیں حدود غائی کے درمیان دریا کرو

(۱۶۰) بیضوی جلی مساوات

ط $لا + ۲$ ص $لا + ۳$ س $۲ = ۱$ ہی او سکا رقبہ دریا کرو حاصل $\left(\frac{1}{2}\right)$ (طس - ص) کہ

(۲۱) خط منحنی لن $ط$ = ط ۲ جم ۲ بر کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو حاصل $\frac{1}{2}$

(۲۲) خط منحنی لن = ط جب ان بر کے تمام حلقوں کے درمیان جو رقبہ واقع ہو اسی دریا کرو حاصل کیے $\frac{1}{2}$ اگر ن طاق ہو اور کیے $\frac{1}{2}$ اگر ن جفت ہو

(۲۳) خط منحنی لن = ط جم ن برابر لن = ط کے درمیان جو رقبہ ہو اسے دریافت کرو

(۲۴) خط منحنی لن ۲ جم بر = ط جب ۳ بر کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

ہاصل $\frac{3}{2}$ ط - $\frac{1}{2}$ لوگ ۲

(۲۵) خط منحنی لن = ط (جم ۲ بر + جب ۲ بر) کا کل رقبہ دریافت کرو

ماصل کہ $\frac{1}{2}$

(۲۶) خط منحنی (لا + $\frac{1}{2}$) = ۴ ط لا $\frac{1}{2}$ کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

(۲۷) خط منحنی (لا + $\frac{1}{2}$) = ۴ ط لا $\frac{1}{2}$ ص ۴ و کا کل رقبہ دریافت کرو حاصل کہ (ط + ص) کہ

(۲۸) خط منحنی $\frac{1}{2}$ ص $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ص $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$ کا کل رقبہ دریافت کرو

ہاصل کہ $\frac{1}{2}$ (ط + ص)

(۲۹) خط منحنی $۳ - ۲$ ط لا $۳ + لا = ۰$ کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

ہاصل $\frac{3}{2}$ ط

(۳۰) خط منحنی لن جم بر = ط جم ۲ بر کے حلقہ کا رقبہ دریافت کرو

ہاصل (۲ - کیے) ط

(۳۱) خط منحنی لن = $\frac{1}{2}$ (ط - ص) جم ۲ بر + ص جم بر

ط بڑا اس سے ہے حاصل $\frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$ کہ ص

(۳۲) لوکارنی خط بیجان کا قیض منحنی اور نصف قطر دائرہ کے درمیان جو قطب ہے کہنے میں دیا

(۳۳) خط منحنی کو میڈس لوق = ط + س فم سراور نصف قطر دائرہ کے درمیان

رقبہ دریافت کرو اور یہ نصف قطر قطب ہے کہنے گئی ہیں

(۳۴) بیضوی میں خط منحنی اور نصف قطر دائرہ کے درمیان رقبہ دریا کرو اور یہ نصف قطر

(۳۵) قریب بیضوی میں خط منحنی اور نصف قطر دائرہ کے درمیان قیض دریا کرو اور یہ نصف قطر اس کے کہنے

(۳۶) خط منحنی لوق = ط (قطر + س بر) اور اسکی خط ممٹخ المقات لوق جم بر = ط کے درمیان

جو رقبہ ہوا و سکو دریافت کرو حاصل $(\frac{\pi}{4} + 2)$ ط

(۳۷) خط منحنی لوق = ط (جم بر + ۱) کا کل رقبہ ط (۲ + $\frac{\pi}{4}$) ہی اور حلقہ اندرونی

کا کل رقبہ ط (۲ - $\frac{\pi}{4}$) ہے

(۳۸) خط منحنی لوق = ط جم بر + ص کا کل رقبہ دریا کرو اس میں ط بڑا اس سے ہے اور

حلقہ اندرونی کا رقبہ دریافت کرو

(۳۹) اگر لا اور محدود کسی نقطہ کے بعد بیضوی مساوی الاشباع لا = ط = ط میں ہوں

تو ثابت کرو کہ

$$لا = ط (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) \text{ اور } ط = ط (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})$$

اس میں لور رقبہ درمیانی خط منحنی اور نصف قطر دائرہ اور محور کا ہے اور نصف قطر دائرہ مرکز

سے نقطہ (لاوی) تک کہتا گیا ہے

(۴۰) بیضوی کے متقاطع علی القوایم عمود المماسوں کے نقطہ تقاطع کا مقام انقاط جو خط منحنی ہو

او سکا کل رقبہ دریا کرو حاصل کہ $(\pi - \frac{\pi}{2})$

یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ مساوات خط منحنی کی

$$\text{لوق} = \frac{(\pi - \frac{\pi}{2}) (\pi + \frac{\pi}{2})}{(\pi + \frac{\pi}{2}) + (\pi - \frac{\pi}{2})}$$

(ہندسہ باجیگر کی مثال ۴۵ باب ۱۲ دیکھو)

(۴۱) خط پچان کے طرف نصف قطر دائر کی پوری چکر سے جو قوس مرسم ہوتی ہے اس کو اور خط مستقیم کے درمیان جو رقبہ واقع ہوا اسی دریافت کرو اور یہ خط مستقیم اطراف قوس میں منسل ہوا مثلاً اگر مساوات خط پچان کی $l = ط$ (۲۲) ہو تو ثابت کرو کہ ۲ کہ سے ہر کی کسی ٹری قیمت کے موافق رقبہ

(۷۲) قریب البیضوی اور اسکی لف اور دو نصف قطر دائرہ کے درمیان جو رقبہ واقع ہوا وہ
 رفہ ۱۵۷ دیکھو

(۲۳) خط تدویر اور اس کے لف اور تدویر کے دو نصف قطر دائر کے درمیان جو رقبہ واقع ہوا اسے دریافت کرو

(۴۴) خط مخیلا = ک جو محور لاکے گرد چکر کھانے سے سطح مستوی پیدا کرے
اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۷۵) اور خط مخفی $p = s$ ^{۱۱} جو محور کے گرد جیکر کہنے سے سطح مندر پید اگر اس کا رقبہ دریا

(۷۴) محور کے گرد و خط منحنی بحیل $s = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2) t$ کی جگہ سے جو سطح مستوی پر پڑا ہو
اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۷۶) ثابت کرو کہ کرہ بیضوی ہینا کی کل سطح بیرونی کارقبہ

$$سکڑا^2 + 1 \left[\frac{x^2 - 1}{x^2} \right] \text{ لوک } \left[\frac{x+1}{x-1} \right] \text{ ہے}$$

(۲۸) ایک خطہ ویراوس کے گرد جبکہ کہانہ جو اس سے نکلا جاتا تو ثابت کرو کہ کل سطح جو پیدا ہوگی اوس کا رقبہ $\frac{32}{3}$ کہ ط ہے

(۴۹) اپنے قاعدہ کے گرد خط تدویر چکر کھانا ہے تو ثابت کرو کہ کل سطح بیرونی جو پیدا ہوگی $\frac{4\pi}{3}$ کہ ط^۲ ہے

(۵۰) خط تدویر محور کے گرد چکر کھانا ہے تو ثابت کرو کہ کل سطح جو پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ ۸ کہ ط (کہ - ۴) ہوگی

(۵۱) خط منحنی جس کا ماس ہمیشہ مساوی خط معلوم کے ہوتا ہے محور لائے گرد چکر کھانا ہے تو کل سطح بیرونی جو پیدا ہوگی اس کا رقبہ ۴ کہ س ہے

(۵۲) کرہ کو دو اسطوانے چھدیتے ہیں اور ان اسطوانوں کے قطر برابر کرہ کے نصف قطروں کے ہیں اور یہ اسطوانے کرہ کے دائرہ عظیمہ میں سے ایک سطح پر عمود ہیں اور محور ان کے دونوں نصف قطروں کے نقاط وسط میں گزرتے ہیں اور یہ دونوں نصف قطر ایک قطر اس دائرہ عظیمہ کا بناتے ہیں تو کرہ کے اس حصہ کے سطح مستدیر کا رقبہ دریافت کرو جو ان اسطوانوں کے درمیان نہیں واقع ہوتے حاصل کر کے قطر کا دو چندان مربع

(۵۳) خط $s = ط \pm ط$ لو کہ $\frac{1}{2}$ کا جو حصہ درمیان حدود و نائمی $لا = ط$ اور $لا = ط$ ہی

کے واقع ہوا ہے جو سطح مستدیر پیدا ہوا اس کا رقبہ دریافت کرو

(۵۴) مع $\frac{1}{2}$ کرہ کو درمیان کرہ و مرکز کی سطح بیرونی کا ہے اور ع عمود

مبدی سے جز ترکیبی کی سطح متساوی ہے اور کل حجم مضوی $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

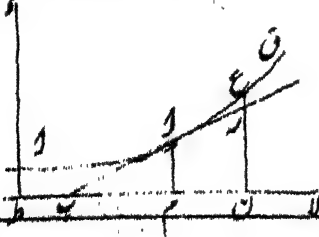
کے اوپر کلی پہلائی گئی ہے

حاصل $\frac{1}{2} (ط + ص + س + ط)$

باب ششم

اجسام کا حجم

صور قانویہ جنہیں کلی مغز و نصف کرہ جسم مستدیر



(۱۷۱) فرض کرو کہ خط منحنی ABC میں لفظ معین ہے اور کوئی اور نقطہ خط منحنی میں E ہے جس کے محدودین EA اور EB میں اور ہر مقابلہ کے موافق لا بڑا بہ نسبت A کے محدود کے ہے اب فرض کرو کہ خط منحنی محور AA' کے گرد چکر لگائے اور خط منحنی AB وسط پیلہا ہوا سے اور دو سطحوں سے جو محور AA' پر عمود ہوں اور ایک نقطہ A پر سے اور دوسرے نقطہ E پر گزرے جو جسم AB ہوا ہوا اسکے حجم کو B سے تعبیر کرو تو بموجب

دفعہ ۳۱۴ علم حساب الحریات کے

نسب = کہ $\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{3}k = \frac{2}{11}$$

اسوائے جہ = مع کہ ۲ زلا

خط منحنی کی مساوات سے دو لاکے جملہ معلوم میں دریافت کر سکتے ہیں فرض کرو کہ مح (۱۱)

جہ = صحیح (لا) + س

فرض کرو کہ جسم حجم کو اس حالت میں تعبیر کرتا ہے کہ نقطہ ع کا لام محدود ہو اور حجم جسم کو اس حالت میں تعبیر کرو کہ نقطہ ع کا محدود لام ہو تو

$$ص = ص + (ل, س)$$

ضم = ص (لام) + ی

اسو سطے جہدہم = صج (لا۲) - صج (لا۱) = کر لایع ۲ زلا

(۱۶۴) مخروط مستدیر قائم پر عمل دفعہ مذکور کا کردہ

فرض کرو کہ خط مستقیم مبدی میں گذرتا ہے اور محور لابرز او یہ مہربتا ہے تو یہ خط ایک خط
مستقیم قائم محور کے گرد چکر کر کے پیدا کر لیا یہاں

5 = لا میں سے

پس ص = مع کہ میں سے لڑا = کہ میں سے لڑا پس

$$\text{جہم - جسم} = \frac{\text{کہ نسبت سے}}{(\text{لام} - \text{لام})}$$

فرض کرو کہ لام = ۱۰ اور می = لام مس سے جس حجم کہ نسبت سے لام یعنی کہ لٹ لام ہو جائیگا اسے معلوم ہوا کہ حجم مخروط مستدیر قائم کا ایک تہائی حاصل قریب قاعدہ کے رقبہ اور ارتفاع کا ہوتا ہے

(۱۸۰) کہہ پردفعہ مذکور کا عمل کرو

بیان کردہ کے مرکز کو بعد مقرر کرو تو $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ حاصل ہوگا پس

$$\text{مع کہ } \frac{2}{3} \text{ زلا} = \text{کہ } (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}$$

$$\text{جہم نصف کمرہ کا} = \frac{2}{3} \text{ مع کہ } \frac{2}{3} \text{ زلا} = \frac{2}{3} \text{ کہ } \frac{2}{3}$$

(۱۸۱) مجہم قریب البیضوی پردفعہ مذکور کا حکم لگاؤ

بیان مجہم کا پیدا کرنے والا خط منحنی قریب البیضوی ہے

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3}$$

$$\text{پس جسم - جسم} = \frac{\text{کہ لام مع } \frac{2}{3} \text{ زلا} = \frac{2}{3} \text{ کہ } (\text{لام} - \frac{2}{3})$$

فرض کرو کہ لام = ۱۰ تو حجم $\frac{2}{3}$ کہ لام ہو جائیگا یعنی $\frac{1}{3}$ کہ ٹم لام اس میں $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3}$

پس حجم نصف اوس ہوا کا ہے جس کا وہی ارتفاع یعنی لام اور وہی قاعدہ یعنی وہ دائرہ ہے جس کا نصف قطر $\frac{2}{3}$ ہے

(۱۸۲) خط تدویر اپنے محور پر چکر کھاتے سے جو مجہم پیدا کرتا ہے اس کا حجم دریافت کرو

علم حساب الجزئیات کی دفعہ ۳۵۸ کے موافق

$$d = \frac{2}{3} (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} \text{ ط } \frac{2}{3}$$

کلی اس طرح مانی و نکلی کی کہ لا اور کی جگہ او کی قیمتیں ارقام برین رکھیں (دفعہ ۳۵۸ علم حساب الجزئیات) پس

$$\text{مع } \frac{2}{3} \text{ زلا} = \text{کہ } \frac{2}{3} \text{ مع } (\text{بر} + \text{جب بر}) \text{ جب بر زبر}$$

نصف خط تدویر کے چکر کھانے سے جو مجہم پیدا ہوتا ہے اس کا حاصل کرنے کے واسطے لاکے حدود دیا

۱۰ اور ۲ طمقر کرو تو اسکے موافق بر کی حدود خدائی ۱۰ اور کہ ہو گئیں

اب مع بڑ جب بر زبر = - بڑ حجم بر + ۲ مع بر حجم بر زبر

= - مع بڑ حجم بر + ۲ بر جب بر + ۲ حجم بر

اس واسطے کہ مع بڑ جب بر زبر = کڑ - ۲

۲ مع بر جب بر زبر = مع بر (۱- حجم ۲ بر) زبر = ۲ - ۲ بر جب ۲ بر - ۲ بر

اس واسطے ۲ کہ مع بر جب بر زبر = کڑ

اور کہ مع جب بر زبر = ۲ کہ مع جب ۲ بر زبر = ۲ دفعہ ۳۵

پس حجم مطلوب = کڑ [کڑ - ۲ + ۲ + ۲] = کڑ (۲ - ۲)

(۱۸۳) حجم مستدیر کے حجم کی صورت قانونیہ جہ = مع کہ ڈ زلاشل اور صورت قانونیہ کے جنکا بیان ہوا ہے ایسے ہی کہ جسکی صداقت اوس وقت ظاہر معلوم ہوتی جس وقت علم حساب الکلیات کا طریقہ کتابت مسجد میں آجاتا ہے دفعہ ۷ کی شکل میں اگر عام دہو اور من تعبیر ۵ لاسے ہوں تو کہ ڈ ۵ لاجم اوس حجم کا ہوگا جو محور لاکے گرد من ع کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے

پس ج کہ ڈ ۵ لاسے اوس حجم سے کہ اوس ب کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے تفاوت بقدر مجموعہ جسم کے رکھتا ہے اور یہ جسم وہ ہیں جو ع ق کے چکر لگانے سے پیدا ہوتے ہیں اور خدائی کے لینے میں یہ مجموعہ معدوم ہوتا ہے پس حجم جو اوس ب کی چکر لگانے سے پیدا ہوتا ہے برابر خدائی

ج کہ ڈ ۵ لاکے یعنی مع کہ ڈ زلا کے ہے

(۱۸۴) علیٰ ہذا القیاس اگرچہ اوس حجم کو تعبیر کرے کہ اوس سطح مستدیر سے کہ محور پر خط منحنی کے چکر لگانے سے پیدا ہوتا ہے اور اوس سطح مستدیر سے کہ محور دہر عمود میں احاطہ ہوتا ہے تو یہ حاصل ہوگا کہ

ص = مع کہ لا زو

اور دفعہ ۱۷ کی طرح یہ حاصل ہو گا کہ

ص - ص = مع کہ لا زو

(۱۸۵) فرض کرو کہ محور لاکے گرد دو خط منحنی جیکر لگائے ہیں اور سطح دو سطح مستد پیدا ہوتے ہیں اب اوں دو حجموں کا تفاوت دریافت کرنا چاہئے جنہیں سے ایک سطح مستد بر اور اوں سطح مستو سی کہ محور لا پر عمود ہیں پیدا ہوتا ہے اور دوسرا دوسرے سطح مستد بر اور سطح مستو کے اندر سی پیدا ہوتا ہے

فرض کرو کہ، مع (لا) مساوات اول خط منحنی کی ہے اور، مع (لا) دوسرے خط منحنی کی مساوات ہے پس اگرچہ تفاوت مطلوب ہو تو یہ حاصل ہو گا

$$\text{ص} = \text{مع کہ } [\text{مع (لا)}] \text{ زلا} - \text{مع کہ } [\text{مع (لا)}] \text{ زلا}$$

$$= \text{مع کہ } [\{ \text{مع (لا)} \} - [\text{مع (لا)}]] \text{ زلا}$$

اگر سطح مستو جو حجم مطلوب کو احاطہ کرتی ہیں لا = لا اور لا = لا سے تشخیص ہوں تو ہم کو کلی لا اور لا کے درمیان لاکے واسطے لینا چاہی

ایک شان صورت بہ فرض کرو کہ خط منحنی مقید ایک کہ خط مستقیم = ط تصفیہ

معین کرنا ہے جو محور کا متوازی ہو تو یہ حاصل ہو گا کہ مع (لا) = ط + صھر (لا)

اور مع (لا) = ط - صھر (لا) امین صھر (لا) کسی لاکے جملہ کو تعبیر کرتا ہے پس

$$[\text{مع (لا)}] - [\text{مع (لا)}] = ۴ ط صھر (لا)$$

اور ص = مع کہ ۴ ط صھر (لا) زلا

فرض کرو کہ دھ خط منحنی کے اطراف کے لا اور لا میں تو محور لاکے گرد خط منحنی

کی گردش سے جو حجم پیدا ہو گا ۴ ط کہ لا مع صھر (لا) زلا ہو گا اور لا مع صھر (لا) زلا

رہ خط منحنی مقید کا ہے پس حجم برابر حاصل ضرب ۴ ط کہ اور رقبہ کا ہوا

اس اثبات میں یہ فرض کر لیا ہے کہ خط منحنی سارا محور لاک کی ایک ہی جانب میں واقع ہے
اگر حجم پیدا کرنے والا خط منحنی دائرہ ہو جو مساوات

$$(لا - ص) + (ک - س) = س^۲$$

سے دریافت ہوتا ہو تو اس کا رقبہ کہ س ہوگا اور اس کے اوپر کسی گردش کے محور لاک کے گرد جو حجم پیدا ہوگا
۲ س کہ ہوگا

(۱۸۴) ایسی طرح اگر الخط منحنی لا = مح (ط) اور لا = مح (ی) محور کے گرد گردش کو یں

تو ان سطح مستدیر اور محوری پر سطح مستوی عمودی کے درمیان جو حجم پیدا ہوگا وہ

$$جہ = مح \left[\left\{ \frac{مح}{س} \right\} - \left\{ \frac{مح}{س} \right\} \right] = س^۲$$

(۱۸۵) دفعہ ۷۸ میں جو ترکیب جسم مستدیر کی حجم دریافت کرنی کی لکھی ہے وہ یہ حجم کو اس

اختیار کیجاتی ہے اس ترکیب کو اس طرح ہی بیان کرنے میں کہ جسم کو یوں خیال کرو کہ وہ

پتلے پتلے بہانکوں میں متوازی سطح مستوی کے ایک سلسلہ سے تقسیم ہوا ہے

اب ہر بہانک کا حجم تقریباً دریافت کرو اور پھر ان حجم کے جمع کرو اور اس حاصل جمع

کی حد غائی اوس حالت میں کہ بہانک عدد محدود چھوٹی ہو جائے دریافت کرو

تو حجم مطلوب کا دریافت ہو جائیگا فرض کرو کہ محور لا پر جو سطح مستوی عمود ہوں اونے

جسم بہانکوں میں تقسیم ہوا اور مح (لا) رقبہ اوس تراش جسم کا ہے کہ مبداء سے لا

بعد پر سطح مستوی سے قطع ہوتا ہے اور دوسرے سطح کا فاصلہ مبداء سے لا + لا ہے

پس ان دو سطح مستوی کے پائین ایک پہانک ہے جس کا سک لا ہی اور اس کا حجم

مح (لا) لا ہے پس اس واسطے حجم جسم کا حد غائی مح ج (لا) لا کی ہے

یعنی مح ج (لا) لا ہے اور کلی کے حدود غائی موقوف جسم کی یا اوس کے کسی حصہ کے

غرض جو معرض بحث میں ہوا اوسکی تخصیص پر موقوف ہونگین

مثلاً منشور کو جسے تعریف (۱۱م) افلیدس میں لکھی ہے منشور کو بہانکوں میں سطح مستوی

جو متوازی اور متساوی اور متشابہ سروں کے ہوں اور محور لا کو عمود دونوں سروں پر
فرض کرو پس Σ (لا) ایک مقدار مستقل ہے اور کثا نام لا رکھو پس حجم منشور کا =
مع Σ لا = $\frac{1}{3}$ عین صہ عمود بلند و برابر اور متشابہ سروں کے درمیان ہے

(۱۸۸) مجسم بیضوی برابر کی دفعہ کا عمل کرو

سادات المجسم بیضوی کی

$$\frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{\Sigma_1} + \frac{1}{\Sigma_2} + \frac{1}{\Sigma_3}$$

ہر اگر محور لا پر سطح مستوی عمود لا کے بعد پر سید سے ہو تو احاطہ تراش کا بیضوی ہوا
جس کے نصف محور Σ (لا) اور Σ_1 (لا) Σ_2 (لا) Σ_3 (لا) ہیں اسے معلوم ہوا
کہ رقبہ بیضوی کا کہ Σ (لا) Σ_1 (لا) Σ_2 (لا) Σ_3 (لا) کی ہر اور معلوم ہوا کہ

حجم مجسم بیضوی کا

$$= \frac{1}{3} \Sigma \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 = \frac{1}{3} \Sigma \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$$

(۱۸۹) مخروط پر دفعہ مذکور کا عمل کرو

فرض کرو کہ مخروط ایسا ہے جس کا قاعدہ کسی شکل مستقیم الاضلاع ہی اور قاعدہ کا رقبہ
وہی اور صہ ارتفاع ہے راس مخروط کو مبداً و محدودین مقرر کرو اور محور لا کا عمود قاعدہ

مخروط پر ہے پس حجم مخروط کا

$$= \frac{1}{3} \Sigma \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$$

اب تراش مخروط کی جو قاعدہ کی سطح متوازی سے ہے شکل مستقیم الاضلاع متشابہ

قاعدہ کے ہوگی اور متشابہ شکلوں کے رقبوں میں وہ نسبت ہوئی جو اون کے اضلاع

کے مربعوں میں اور لا اور صہ مناسب اضلاع متناظرہ کے ہیں اسے ہم نتیجہ لکھتے ہیں کہ

$$\Sigma = \frac{1}{3} \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$$

پس حجم مخروط کا

$$\frac{1}{2} = \text{جسم لا زلا} = \frac{1}{3}$$

یہی تحقیقات مخروط مستدیر کے باب میں بھی ہو سکتی ہے جسکا قاعدہ کوئی خط منحنی مقید ہو
(۱۹۰) ایک در مثال یہ ہے کہ اس حجم کو دریافت کر جو جسم بعید البضوی کے اور اس کے
ممتنع الماقات مخروط مستدیر اور دو سطح مستوی کے درمیان واقع ہوا اور یہ دونو سطح
محور مشترک پر عمود ہیں اور جسم بعید البضوی ایک فرع سے بنایا گیا ہے

فرض کرو کہ مسادات جسم بعید البضوی کی

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1$$

اور مخروط مستدیر کی

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 0$$

اگر اول سطح مستدیر کی تراش محور لا پر مبدی سے بعد لا پر ایک سطح مستوی عمودی سے بنایا جائے
تو احاطہ اس تراش کا بعضوی ہوگا جسکا رقبہ کہ ص س $(\frac{1}{2} + 1)$ ہے اور دوسرے
سطح مستدیر کی تراش جو اسی سطح سے بنائی جائے اور کا احاطہ بھی بعضوی ہے اور اس کا
رقبہ کہ ص س $\frac{1}{2}$ ہے اسو سطح تفاوت رقبوں کا کہ ص س ہے اسی معلوم ہو کہ حجم مطلوب
جو سطح مستوی لا لا اور لا لا سے احاطہ کیا گیا فرض کیا جائے

لا جمع کہ ص س زلا یعنی کہ ص س (لا - لا) ہے

(۱۹۱) بعض اوقات اس میں آسانی ہوتی ہے کہ تراشیں سطح متوازیہ سے جو بنائی جائیں وہ محور لا پر
عمود نہ ہوں اگر سہ زاویہ میلان محور لا کا سطح متوازیہ کے ساتھ ہو تو مچ (لا) جب سہ لا
حجم ایک یہاں تک کا ہوگا اگے عمل موافق سابق کے کلی نکالنی کا کرو

(۱۹۲) دفعات ۱۷۶ اور ۱۷۷ میں جو کیفیتیں لکھی ہیں وہ اس باب کی نسبت بھی لکھی ہیں
فرض کرو کہ جسم ایسا ہی ہے کہ جو تراش اس کی سطح مستوی سے کہ وہ کسی صحن سطح مستوی کی متوازی
لا کے بعد بر بنائی جائے اور کا رقبہ ہمیشہ + ق لا + ص لا + صی لا ہے اس میں

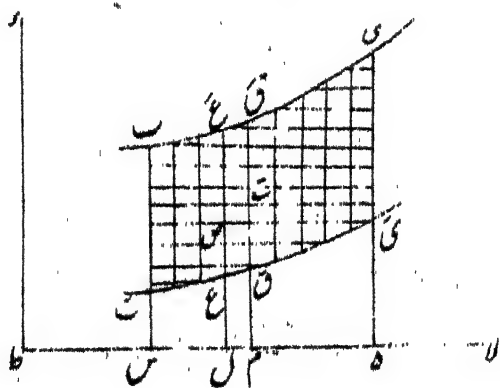
ع دق در دصی مفاد مستقل بین فرض کرو تین تراشون جسم کی متساوی الابعاد سطح بستے معین کی متوازی سطح سی بنائی جائیں اور ۲ حصہ دو اطراف (تراشوں) کے ہیں ۱ حصہ ہو اور باہر سب رقبہ تراشوں کا ۱ ام اور ۱ ام اور ۱ ام ہو تو جسم کے اوس حصہ کا حجم جو اطراف کے تراشوں کے مابین واقع ہو برابر

$$\frac{1}{3} (1^3 + 1^3 + 1^3) = 1$$

اگر تراشیں متساوی الابعاد بنائی جائیں اور ۳ حصہ بعد درمیان اطراف کو تراشوں کے ہو اور رقبہ تراشوں کا بالترتیب ۱ ام، ۱ ام، ۱ ام ہو تو حجم جسم کے اوس حصہ کا جو اطراف کے تراشوں کے درمیان واقع ہو

$$\frac{1}{3} (1^3 + 1^3 + 1^3) = 1$$

ہوگا اسی معلوم ہوا کہ کسی جسم کی تقریبی حجم کے تخمینہ کرنے کے قواعد یہ ہیں کہ تراشیں متساوی الابعاد بنائو اور ان تراشوں کے رقبوں کو قائم مقام اوس معینوں کا کرو جو درجات ۱، ۲، ۳، ۴ اور ۵ کے قواعد میں بیان ہوئی ہیں
صور قانونیہ جنہیں کلی ثناء ہے



(۱۹۳) اول ہم ایک صورت قانونیہ مجسم مستدیر کی لکھتی ہیں شکل میں فرض کر دیکھ لا اور محدودین ص کے اور لا + ۵ لا اور ۵ + ۵ محدودین نقطہ ت کے ہیں

اور فرض کرو کہ کل شکل محور لاکے گرد چکر کھاتی ہے تو غیر ترکیبی صورت سے ایک حلقہ دائرہ منبج پیدا
جس کا حجم آخر کار ۲۵ و ۵۵ ہوگا اور یہ بات اس خیال سے پیدا ہوتی ہے
۵۵ و ۵۵ رقبہ صورت کا ہے اور ۲۵ و ۵۵ محیط دائرہ کا ہے جو ص سے مرسم ہوتا ہے
اسی معلوم ہوا کہ حجم جو ب می می ب سے پیدا ہوتا ہے حد غائی ایسی رقموں کی ہوگی
جیسے ۲۵ و ۵۵ و ۵۵ ہے

فرض کرو کہ $\frac{1}{2}$ حجم مطلوب کو تعبیر کرتا ہے تو
 $\frac{1}{2} = 2$ کہ مع مع و لازمی

حدود وغائی کلی ایسی لی گئی ہے کہ اوس میں تمام اجزاء ترکیبی حجم مطلوب کے داخل ہیں
(۱۹۴) فرض کرو کہ حجم مطلوب سطح حاصل ہوتا ہے کہ تمام شکل باسی ہی کی جکر کہانے
سے پیدا ہوتا ہے اور = مج (لا) مساوات اوپر کے خط منحنی کی اور = مع (لا) مساوات
نیچے کے خط منحنی کی ہے اور طس = لا اور طه = لام پس اول کلی حدود وغائی
= مع (لا) اور = مع (لا) کے درمیان بلحاظ د کے لو اور تمام اجزاء ترکیبی کو
جو مثل ۲ کہ د لا د کے اوس مجسم میں داخل ہیں کہ قطعہ ع ق ع ق کے حرکت سے
پیدا ہوتا ہے جمع کرو اور یہ حدود وغائی لا اور لام کے درمیان بلحاظ لا کے کلی کو تو اب اس
عمل کو رموز میں ا طرح بیان کرتے ہیں کہ

دوسری صورت بانیہ اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ حدود قاضی معینہ کے درمیان بلخاڑ کے کلی لین اور وہ مطابق دفعہ ۱۸۵ کے ہوتا ہے

(۱۴۵) پس دفعہ گذشتہ میں مجسم کو اجزاء و ترکیبی میں جو حلقی ہیں تقسیم کیا ہے اور ان حلقوں کا کونہ ۲ کہ ۵ لا ۵ ہے اور کلی میں ان حلقوں کو جمع کیا ہے

جسے کہ ایک شکل ایسی بنتی ہے کہ وہ تفاوت دو متحدہ المکرر ذرات اور قطعات کا ہے اور دوسرے کلی میں ہم نے ان تمام شکلوں کو جمع کیا ہے اور اوسے جسم مطلوب کا حجم دریافت ہو سکتا ہے دفعہ گذشتہ کی صورت قانونیہ کی صداقت اوسوقت ظاہر معلوم ہونی لگتی ہے کہ علم حساب الکلیات کا طریقہ کنایت سمجھ میں آجاتا ہے

(۱۵۶) فرض کرو کہ شکل جو محور لاک گرد چکر کہانی ہی خطوط بنتی لا = حج (۱) اور لا = حج (۲) سے اور خطوط مستقیم د = د اور د = د سے احاطہ ہوئی تو ہم کے واسطے صورت قانونیہ کے نکالنے میں آسانی ہوگی کہ اول کلی بلحاظ لاکس لیں تو

$$ص = ۲۲۰ \text{ حج (۱) مع } د \text{ و } ۲۲۰ \text{ حج (۲) مع } د \text{ و } ۲۲۰ \text{ حج (۱) مع } د \text{ و } ۲۲۰ \text{ حج (۲) مع } د$$

اس صورت میں کلی بلحاظ لاکس جب بنتی ہیں تو ہم تمام اجزاء ترکیبی کو جو مثل ۲۲۰ د و ۲۲۰ لاکس ہیں جمع کرنے میں اور انکا نصف قطر ہی ہے پس حاصل جمع ان اجزاء ترکیبی کا ایک نون مثل اسطوانہ کی شکل کا ہوتا ہے جسکی نصف است ۵ د ہے اور نصف قطر د اور

حج (۱) - حج (۲) ارتفاع

پس $ص = ۲۲۰ \text{ حج (۱) مع } [\text{حج (۱) - حج (۲) }] \text{ و } ۲۲۰$

(۱۵۷) پہا ایک مثال دفعہ گذشتہ کی ہے کہ حجم اوس مجسم کا دریافت کریں جو اسطرح پیدا ہوتا ہے کہ رقبہ لاکس کو محور لاکس گرد شکل دفعہ ۱۲۱ میں چکر دین نصف کرہ جو اصل ب کے چکر کہانے سے پیدا ہوتا ہے اور مجسم قریب البیضوی جو اصل ب کے چکر کہانے سے پیدا ہوتا ہے ان دونوں میں جو نصف کرہ کو انفرایش مجسم قریب البیضوی بر حال ہوگی اوسکی برابر حجم مطلوب ہوگا پس اسواسطی حاصل معلوم ہے اس مثال کو نتیجہ کے خاطر سے نہیں لکھا بلکہ کلی مشاہد کے توضیح اور تصریح کے واسطے لکھا ہے

فرض کرو کہ ص مبدیہ ہے اور محور لاکس مثبت سمت بائیں طرف ہو نو سوان لاکس کی د = ۲۲۰ ط (ط - لا) ہے اور ب ل کی د = ۲۲۰ ط - لا

فرض کرو کہ حصہ حجم مطلوب کو تعبیر کرتا ہے تو

$$ص = \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا}$$

اگر ہم اول کلی بلحاظ کے لین تو دفعہ ۱۷۱ کی طرح فرض کرو کہ شکل اول ب دو حصوں میں تقسیم ہوئی ہے پس

$$ص = \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا} + \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا}$$

اگر اول بلحاظ کے کلی لیتی جاہیں تو دفعہ ۱۷۱ کی طرح شکل اول ب کو دو حصوں میں تقسیم

$$پس ص = \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا} + \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا}$$

پھر فرض کرو کہ محور لاکے گرد جول و س کے چکر کہانی سی حجم پیدا ہوا و سکودریا کرنا مطلوب ہے

اور محور لاکے مثبت سمت دائیں طرف ہو تو مساوات س کی $2 = 2\sqrt{2} (2 + 2)$ ہے

اور ل د کی $2 = 2\sqrt{2} - 2$ ہے فرض کرو کہ حصہ مطلوب ہے تو

$$ص = \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا} + \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا}$$

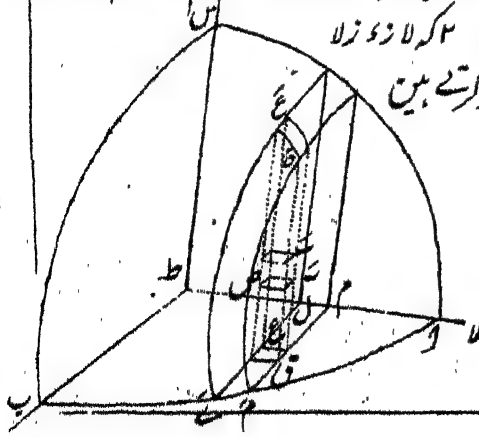
اگر ہم بلحاظ لاکے اول کلی لگا لیتی جاہیں تو دفعہ ۱۷۱ کی طرح فرض کرو کہ ل و س دو حصوں میں

$$پس ص = \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا} + \frac{2}{3} \text{ مع } \frac{2}{3} \frac{(2 - 2\sqrt{2})}{2} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا}$$

(۱۹۸) اسی طرح اگر محور کے گرد خط منحنی کے چکر کہانے سے جو حجم پیدا ہوگا وہی حجم

$$ص = \frac{2}{3} \text{ مع } 2 \text{ کہ } 2 \text{ زری زلا}$$

(۱۹۹) اب ہم کسی ایک جسم کا ذکر کرتے ہیں



فرض کرو کہ لا اور ۱ اور ۲ محدودین نقطہ ع کے ہیں اور ج کوئی نقطہ سطح کا ہے اور اسکے متصل کے نقطہ ق کے محدودین لا + ۱ لا اور ۲ + ۱ اور ۳ + ۱ سے

ہیں ع سے سطح متوازی سطح متوازی محدودین (لا ۱) اور (۱ و ۲) کے کچھ اور ق سے بھی سطح متوازی انہیں محدودین سطح کے کاتولوان چاروں سطح کے درمیان ایک ستون ہوگا جسکا ع ق قاعدہ ہے اور ع ع ارتفاع ہے حجم اس ستون کا آخر کو ۱ ۱ لا ۱ ۱ و ۱ اور حصہ معین سطح معلوم کے سطح مستوی (لا ۱) کے درمیان جو حجم واقع ہوگا وہ سطح دریافت ہوگا

کہ رقبہ جو مثل ۱ ۱ لا ۱ ۱ کے ہیں ان کے سلسلہ کو جمع کرو اور فرض کرو کہ حجم کو تعبیر کیا تو

$$\text{ص} = \text{مع} \times \text{ع} \times \text{لا} \times \text{ز}$$

سطح کے مساوات سے سے جملہ لا اور ۱ کا معلوم ہوتا ہے حدود دفاعی کلی کہی لینی چاہئے کہ تمام اجزاء ترکیبی مجسم کے اوسمین داخل ہوں اگر ہم بلحاظ کے اول کلی لین نو ہم اون ستونوں کو جمع کریں جسے کہ وہ پہانک ہے ہی جو درمیان دو سطح مستوی کے کہ عمود محور لا پر نہیں افغ ہوتی ہے پس حدود کلی بلحاظ کے جملہ لا کا ہوگا اور یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مع} \times \text{ع} \times \text{لا} = \text{ح} \quad (۱)$$

اسمین ح (لا) نصف الامر میں رقبہ تراش مجسم کا ہے اور یہ تراش اوس سطح مستوی سے پیدا ہوتی ہے کہ لا کے فاصلہ پر سے محور لا پر عمود ہو پس آخر کو

$$\text{ص} = \text{مع} \times \text{ح} \times \text{لا} \quad (۲)$$

یہ صورت قانونیہ دفعہ ۸۷ کی ساتھ مطابق ہوتی ہے

(۲۰۰) مجسم بیضوی پر عمل دفعہ مذکور کا کرو

اوس مجسم بیضوی کے اٹھوں حصہ کا حجم دریافت کرو جسکی مساوات

سے تشخیص ہوتے ہیں

اب مع وزو = $\frac{1}{2}$ اور کی حدود غائی

ک۔ $\frac{1}{2}$ [س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$] اور ک + $\frac{1}{2}$ (س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$) ہیں

پس ہم کو بہرہ حاصل ہوتا ہے کہ

نک $\frac{1}{2}$ [س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$]

پس آخر کو حجم مطلوب

$$= \frac{1}{6} \text{ مع } \frac{1}{2} [س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$] زلا$$

اس میں حدود غائی لاکھ - س اور صہ + س میں اور

مع لا $\frac{1}{2}$ [س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$] زلا = مع (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$ [س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$] زلا

+ صہ مع $\frac{1}{2}$ [س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$] زلا

لا۔ صہ = طو کے رکھو تو بہرہ حاصل ہوگا

مع طو $\frac{1}{2}$ [س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$] زطو + صہ مع $\frac{1}{2}$ [س۔ (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$] زطو

حدود غائی طو کی - س اور + س میں اس واسطے حاصل $\frac{1}{2}$ کہ ہے

اور حجم مطلوب $\frac{1}{6}$ کہ ہے

اس نتیجہ میں بہرہ فرض کیا گیا ہے کہ لاؤ مثبت کلی کی تمام حدود غائی کے درمیان ہے

یعنی دائرہ جو (لا۔ صہ) $\frac{1}{2}$ + (و۔ ک) $\frac{1}{2}$ = س تشخیص ہوتا ہے، اول ربعہ میں بائیں ربعہ

میں بالکل فرض کیا گیا ہے اگر بہرہ شرط پوری نہ ہوتی ہو تو نتیجہ سے حجم کی مثبت عدد نہیں تشخیص ہو سکتی

لیکن اس کی میزان یوں لگ سکتی کہ کسی حصہ کو مثبت اور کسی حصہ کو منفی تخمینہ میں لگائیں

مثلاً اگر حصہ اور ک معدوم ہو جائیں تو ہمارا نتیجہ بھی معلوم ہو جائیگا

(۲۰۳) مجسم کو جیسا ستونوں میں تقسیم کرتے ہیں کہ اس کا قاعدہ سطوح قائم الزاویہ ہوں

اور اس سبب حجم ستون سے لا لا ہوتا ہے مجسم کو ایسے ستونوں میں تقسیم کریں

۱۴۱
کہ وہ رقبہ کے قطعی جز ترکیبی پر قائم ہوں تو اسی میں معلوم ہوگا کہ سبوت کا حجم سے تقطیر ہوا
اس واسطے حجم جسے جسم کا اس صورت قانون سے تعبیر ہوگا کہ

۱۰ = مع معے لی زہیر زلی

مساوات طبعی مسند میر سے کوئی اور بر کے جملوں میں بیان کرو

مثلاً اوسن حجم دریافت کرنا منظور ہو جو سطح مسکے =۔ اور سطح مستدیر لا = $2\pi r$ سے

اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ - لا کے درمیان واقع ہو جانے سے = $\frac{1}{2}$ اور حدود غائی

لق اور سیر کی ایسی ہوتی چاہی کہ کلی تمام رقبہ دائرہ $2 = 2$ مس $2 - 2$ لا پر پہیلے فرض کو کہ

بق = ۲ س جم بر تو جم مطلوب

$$= \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{b}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b+1} = \frac{1}{b(b+1)}$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$= \frac{r^2}{\tau} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} \text{ کہے (بموجب دفعہ ۳۵)}$$
$$\frac{\sum x^2}{n} =$$

(۲۰۴) اوس محبم کا حجر دریافت کرو جو سطح مستوی (لاوے) اور سطح مسند ہر کے درمیان واقع ہو

اور مساوات سطحِ مستدیر کی

$$\frac{3+1}{5} = 2$$

ہی یہاں چونکہ $\lambda + \mu = \nu$

سطح مستدیر مبدا سے ہر سمت میں غیر متناہی پہنچتی پس حدود غائی ہر کی۔ اور اکہ میں

اور ہی کے ۔ اور صہ ہیں

اب مع $\frac{1}{2}$ قزق = $\frac{1}{2}$ قزق

پس صبح ہی سے سوزاق = ۲

۱۰۲ = مجموع زیر

اپس حجم مطلوب کہہ دیا ہے

صورتاً قانونی نہیں مگر مثلاً ملک

(۲۰۵) دفعہ ۱۹۹ کی شکل میں نو فیس کرو کہ ہم ایک سلسلہ سطح مستوی کا پانچین بوجھ دو چورے پر ہو اور سے فاصلہ ایک سطح مستوی کا مبدا سے ہوا ورت + Δ - فاصلہ دوسرے سطح مستوی کا ہو ان سطح مستوی کے درمیان سنون ع ق ع ق ایک جز ترکیبی قائم الزاویہ جسم متواری اس طرح ہے۔
جسم کا حجم Δ لا Δ ع Δ ہے ہی کل حجم کو ایسے اجزاء ترکیبی کے مجموعہ کی س غائی خیال کر سکے گزشتہ
اسے معلوم ہوا کہ اگر وہ اسکے حجم کو تعبیر کرے تو

۴ = مع مع مع زلا زلا زلا

(۲۰۴) اسطوانات جو مساوات

$$= 1152 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$$

سے تشخیص ہوتا ہے اس کے اوس حصہ کا حجم دریافت کرو جو سطح مستوی

سے = لاس سے اور سے = لاس سے

کے درمیان واقع ہو

بہان اگر قائم مقام ہا (۱۱۲-۱۱۱) کا ہو تو یہ مسئلہ ہوگا کہ

جبر = طامع و طامع لاسس سمیع زلازل و زلزلے

$= 2 \text{ طمع} + 1 \text{ جمع} + 1 \text{ صبر} - 1 \text{ مس سہ} = \text{لازل لازو}$

$$r = (مس ص - مس س) \sqrt{\frac{1}{(2 - \mu^2)}} \quad \text{نہ}$$

$$= ۲ \text{ (مس صہ - مس صہ) کی طرح}$$

(۳۰۷) ہم پہلے لکھائی ہیں کہ قطعی جز ترکیبی مستوی رقبہ کا ل ۵ بر ۵ ہے

فرض کرو کہ خط ابتدائی کے گرد زاویہ ۲ کہ پر یہ سطح مستوی چکر کہائے تو مجسم حلقہ دائرہ پیدا ہوگا جسکا حجم ۲ کہ لقی جب برقی ۵ برہ لقی ہوگا
 چونکہ ۲ کہ لقی جب بر محیط اوس دائرہ کا ہی ہو اوس نقطہ سے مرسم ہوتا ہے جسکے قطبی محدود ہیں
 فرض کرو کہ سہ اوس زاویہ کو تعبیر کرتا ہے جو سطح مستوی جز ترکیبی کی مقام پر سطح مستوی کے
 ابتدائی مقام پر بناتی ہے اور سر ۵ سر وہ زاویہ ہے جو سطح مستوی مقام مقلدہ پر
 ابتدائی سطح مستوی کے ساتھ بناتی تو حصہ حلقہ مجسم کا جو سطح مستوی سے متحرک کے درمیان
 ان دونوں مقاموں میں واقع ہوگا کل حلقہ مجسم سی وہی نسبت رکھتا ہے جو ۵ سر نسبت
 ۲ کہ سے رکھتا ہے اسے معلوم ہوا کہ حجم اس حصہ درمیانی کا
 لقی جب سر ۵ سر ۵ برہ لقی

ہی پس یہ محدودین قطبی موافق ایک صورت بیانہ پر مجسم کے جز ترکیبی کے لئے جو پس معلوم ہوا کہ
 حجم کل مجسم کا اسی اجزاء ترکیبی کی مجموعہ کی حدغائی یعنی سے دریافت ہوتا ہے یعنی اگر وہ
 حجم مطلوب کو تعبیر کرے تو

جہ = مع مع لقی جب بر سر زیر لقی

کلی کی حدود غائی ایسی لینی چاہی کہ او نہیں تمام اجزاء ترکیبی مجسم کے اجائین طالب علم
 کو یاد رکھنا چاہی کہ میدر سے کسی نقطہ کے بعد کو لقی تعبیر کرتا ہے اور بر اوس زاویہ کو
 تعبیر کرتا ہے کہ یہ بعد کسی خط مستقیم معین کے ساتھ بناتا ہے اور سہ وہ زاویہ ہے جو
 سطح مستوی اس بعد اور خط مستقیم معین پر گزرنے سے سطح مستوی معین کے ساتھ
 بناتی ہے اور یہ سطح معین خط مستقیم معین پر گزرتی ہے

(۲۰۸) مثلاً فرض کرو کہ ہم صورت قانونیہ کو وہاں کام میں لایا جاتے ہیں جہاں کرہ کے
 اٹھوان حصہ کا حجم ہم کو دریافت کرنا ہو اول کلی بلحاظ لقی کے تو نو یہ حاصل ہوگا کہ

مع لقی زلی = لقی

فرض کرو کہ ط نصف قطر کرہ کا ہے تو حدود غائی نق کی ۱۰ اور ط ہیں پس

$$\text{جہ} = \text{مع} \frac{\text{ط}}{۳} \text{ جب سر سر زبر}$$

پس بلحاظ نق کے کلی لینی میں ہم تمام اجزاء ترکیبی جو مثل نق جب سر ۵ سر ۵ بر ۵ نق کے ہیں اور جسم مخروطی کو بناتے ہیں جمع کرتے ہیں مخروط کا اس ۵ مرکز کرہ پر سے اور اس کا قاعدہ سطح مستدیر کرہ کا جز ترکیبی منحنی ہے اور وہ ط جب سر ۵ سر ۵ بر سے تعبیر ہوتا ہے

کلی بلحاظ بر کے نو تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{مع جب سر زبر} = \text{جہ بر}$$

بر کی حدود غائی ۱۰ اور کچھ ہیں پس:

$$\text{جہ} = \text{مع} \frac{\text{ط}}{۳} \text{ ز سر}$$

اس طرح بلحاظ بر کے جب کلی لیجاتی ہے تو ہم تمام اول مخروطات کو جمع کرتے ہیں جو متشابه $\frac{\text{ط}}{۳}$ جب سر ۵ سر ۵ بر کے ہیں اور یہ مخروط جسم بیانیہ کے اندر ہیں اور یہ بیانیہ شکل فائدہ ہے اور یہ جسم دو سطوح ستوی کے درمیان واقع ہوتا ہے اور یہ سطح ستوی خط مستقیم معین میں گذرتی ہیں اور یہ خط مستقیم معین ہوا فاقہ سر اور سر + ۵ سر کے لیا گیا ہے

اب آخر یہ ہے کہ بلحاظ سر کے ۱۰ سے کچھ تک کلی ہیں تو

$$\text{جہ} = \text{کچھ} \frac{\text{ط}}{۳}$$

اس مثال میں کلیان ہر ایک ترتیب سے لی جاسکتی ہیں طالب علم کو چاہی کہ اونکو مختلف ترتیبوں سے لے آؤں گا خوب امتحان کرے اور پھر اونکی توضیح کرے (۲۰۹) مخروط مستدیر کا اس کرہ کے سطح مستدیر پر ہے اور اس کا محور منطبق کرہ کی قطر ہے اور یہ قطر اس نقطہ پر گذرتا ہے تو کرہ اور مخروط مستدیر کے درمیان جو حجم مشترک ہے

او سے دریافت کرو

فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ہے اور یہ نصف زاویہ اس مخروط مسند بر کا ہے
اور یہ حجم مطلوب ہے تو قطبی مساوات کر کے اس صورت میں کہ اس مخروط مسند بر کا مسدود

$$\text{لی} = ۲ ط \text{ حجم بر ہے اس واسطے}$$

$$\text{ج} = \text{یکمیع} \text{ یکمیع} \text{ ط حجم بر ہے لی جب بر زیر بر زنی}$$

$$(۲۱۰) \text{ خط منحنی لی} = ط (۱ + \text{جم بر}) \text{ خط ابتدائی گرد چکر کرتا ہے تو جو جسم پیدا ہو}$$

اس کا حجم دریافت کرو

$$\text{بیان حجم مطلوب} = \text{یکمیع} \text{ ط (۱ + جم بر) یکمیع لی جب بر زیر بر زنی}$$

$$= ۲ \text{ کیے ط} \text{ یکمیع} (۱ + \text{جم بر}) \text{ جب بر زیر بر}$$

$$= ۲ \text{ کیے ط} \text{ کے دریافت ہوگا}$$

امثلہ

(۱) اگر خط منحنی ۱ (لا - ۴ ط) = ط لا (لا - ۳ ط) محور لا پر حرکت کرے تو حجم جو پیدا ہوگا

وہ لا = ۳ ط تک کیے ط (۱۵ - ۱۴ لوگ ۲) ہوگا

(۲) اس سے جو ماس نکالا جائے اس کے اوپر خط ندویر چکر لگاتا ہے تو ثابت کرو

کہ جو حجم خط منحنی سے پیدا ہوگا وہ ط ہے

(۳) خط ندویر اپنی قاعدہ پر چکر لگاتا ہے تو ثابت کرو کہ خط منحنی سے جو حجم پیدا ہوتا ہے

وہ ط سے

(۴) خط منحنی ط (۲ - لا) = لا اپنی ممسح العلاقات کے گرد چکر کرتا ہے تو ثابت کرو

کہ حجم جو پیدا ہوگا ۲ ط س

(۵) خط منحنی لا ۲ = ۴ ط (۲ - لا) اپنی ممسح العلاقات کے گرد چکر کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

حجم جو پیدا ہوگا n کر ڈالتے

(۶) خط منحنی $(3 - 2) = 2$ تا محور کے گرد چکر کھانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے

اوس کے حصہ مستدیر کا حجم دریافت کرو حاصل $\frac{254}{315}$ کہ پتہ

(۷) کرہ ناقص کے حجم کو ارتقام ارتفاع اور اوس کے سرور کے نصف قطرین کے ارتقام میں لیتے

ہاصل کیچھے $(\text{حصہ} + 2) (n^2 + 1n^2)$

(۸) اگر خط منحنی $2 = 2$ مم لا + ن لا محور لاکے گرد حرکت کرے تو مجسم ناقص کا حجم دریافت کرو

اور ثابت کرو کہ وہ

کیچھے $(n^2 + 2n - \frac{1}{2}n^2)$ یا کہ حصہ $(n^2 + \frac{1}{2}n^2)$ سے تعبیر ہوتا ہے

اس میں حصہ ارتفاع نیم ناقص کا ہے اور n اور n اور n نصف قطر اوس کے سرور

اور تراش متوازی کے ہیں اور صورت بیانہ مخروط مستدیر اور کرہ بیضوی کی استنباط کرو

(۹) کلی نکاتی کے عمل سے اوس حجم کو دریافت کرو جو بائیں مخروط مستدیر اور کرہ کے واقع ہو

مخروط مستدیر کا زاویہ راس 65.4 اور کرہ کا قطر معلوم ہے اور وہ مخروط مستدیر کو

دائرہ پر مس کرتا ہے

(۱۰) اگر مجسم قریب البیضوی کا راس قاعدہ میں ہو اور محور سطح مستدیر سطوانہ میں تو سطوانہ

سطح مستدیر مجسم قریب البیضوی سے ایسی حصوں میں تقسیم ہوگا کہ اون میں نسبت $3:2$ کی ہوگی

ارتفاع اور قطر قاعدہ سطوانہ کا اور عرض مستقیم مجسم قریب البیضوی کا یہ سب البسین برابر ہیں

(۱۱) مجسم قریب البیضوی جو قریب البیضوی کی گردش سے پیدا ہوا اور مخروط مستدیر قائم کا ایک قاعدہ

ایک ہی محور ایک ہی راس ہی اور محور کو قطر بنا کر ایک کرہ بنایا گیا ہے تو ثابت کرو کہ

مخروط مستدیر اور مجسم قریب البیضوی کے حجم بائیں کو کرہ کے حجم سے وہ نسبت ہوگی جو

عرض مستقیم قریب البیضوی کو قطر کرہ سے

(۱۲) جو مجسم اسے سطح سے احاطہ ہوا ہو جسکی مساوات

اوسکا کل حجم دریافت کرو حاصل $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ کہ ط ص س

(۱۳) جو مجسم ایسے سطح سے احاطہ ہوا ہو جسکی مساوات $(\lambda + \lambda + \lambda) = 3\lambda = 2\lambda$ لاوے ہو

اوسکا کل حجم دریافت کرو حاصل $\frac{9}{4} \lambda$

(۱۴) محور لاکے گرد خط منحنی $(\lambda + \lambda) = 2\lambda$ ط لا + ص لا کے چکر کھانے سے جو مجسم پیدا ہوگا اوسکا حجم دریافت کرو اور یہ فرض کرو کہ ط ٹر اس سے ہے اور جب ط = ص تو تینا وکنا نتیجہ ہوگا

حاصل کیے $(\lambda + \lambda + \lambda) \lambda + \frac{1}{2} \lambda (\lambda - \lambda) \lambda$ لوگ $\frac{1}{2} (\lambda - \lambda) \lambda$ ص

(۱۵) محور لاکے گرد خط منحنی $(\lambda + \lambda) = 2\lambda$ ط لا + ص لا کے چکر کھانے سے جو مجسم پیدا ہوگا اوسکا حجم دریافت کرو اور یہ فرض کرو کہ ط ٹر اس سے ہے اور جب ط = ص تو تینا وکنا

کیا نتیجہ پیدا ہوگا

حاصل کیے $(\lambda + \lambda + \lambda) \lambda + \frac{1}{2} \lambda (\lambda - \lambda) \lambda$ جب ط $\frac{1}{2} (\lambda - \lambda) \lambda$ ص

(۱۶) محور لاکے گرد خط منحنی $(\lambda + \lambda) = 2\lambda$ ط لا + ص لا کے چکر کھانے سے جو مجسم پیدا ہوگا اوسکا

حاصل کیے $\frac{1}{2} \lambda (\lambda - \lambda) \lambda$ لوگ $\frac{1}{2} (\lambda - \lambda) \lambda$ ص

(۱۷) مجسم قریب البیضوی ہو قریب البیضوی کی گردش سی پیدا ہوتا ہے اوسکا محور منطبق

کرہ کے قطر پر ہے اور اوسکا راس کرہ سے باہر ہے جو مجسم قریب البیضوی کے باہر کرہ کا حصہ ہے

اوسکا حجم دریافت کرو

حاصل کیے $\frac{1}{2} \lambda (\lambda - \lambda) \lambda$ ص میں حصہ فاصلہ اون دو سطح مستوی کے باہر ہے جنہیں سطح مستدیر کے

فصل منحنی واقع ہیں

(۱۸) اوس حجم کو دریافت کرو جو سطح مستدیر

$$\frac{1}{2} \lambda (\lambda - \lambda) \lambda = 2\lambda$$

مین سے ایک سطح مستوی متوازی سطح (دوسے) کی طاس کے فاصلہ پر اس سے قطع کرے

ماحصل کہ طاس (اس س)

(۱۹) بیضیوں کے محور کلان کی سر سے تماس نکال لگیا ہے اس کے گرد رابعہ بیضیوں کی چکر لگاتا ہے

تو ثابت کرو کہ یہ خط مستوی سے سطح مستدیر پیدا ہوگی اس کے درمیان حجم

کیہ طاس (۱۰-۲) ہوگا

(۲۰) بن سطح مستدیر کی تعریف معادلات

$$لا + ز = س \text{ سے اور } لا + ز = د لا اور س = - \text{ سے ہوتی ہے}$$

اس کے مابین جو حجم احاطہ ہوتا ہو اس کو دریافت کرو اور تجلیج کی شرفی کو نکالیں بنا کر تلاء

ماحصل کہ طاس

(۲۱) اگر مرکز کوئی سطح مستدیر مقید ہو اور زس ایک جزئی کی سر کا نقطہ ح کے گرد قی کے

فاصلہ پر نقطہ معین ط سے ہو اور نقطہ ح پر جو مجموعہ المماس اندر کی طرف کہنیا جائے وہ نصف قطر دائرہ ط ح کے ساتھ زاویہ سر بناتا ہو تو ثابت کرو کہ سطح مستدیر کے اندر حجم

$$= \frac{1}{3} \text{ مع لہ حجم سر زمر}$$

کل سطح مستدیر پر جمع پہنچاتی گئی ہے

مجسم بیضوی کے مرکز کو نقطہ ط قرار دیکر اس کی صورت قانونیہ کے موافق حجم دریا کرو

اور کلی کے جملہ مراتب یعنی از روی علم ہندسہ کے بیان کرو

(۲۲) قیمت مع مع مع لا ز لا ز سے مجسم بیضوی کے حجم پر دریافت کرو

ماحصل کہ طاس

(۲۳) کلی کی حدود دعائی تشخیص کرو تاکہ وہ حجم حاصل ہو کہ درمیان سطح مستوی (لا و) اور سطح

مستدیر کے واقع ہو جسکی مساوات

$$لا + پ لا + س ز - دے - ت =$$

(۲۲) حدود غائی اوس گئی کی بیان کرو جو صورت قانونیہ مع مع زلا زلا زے کی شکل میں اس مطلب کے واسطے کام میں آتی ہے کہ سطح وہ حجم معلوم ہو جو سطح مستدیر نصفہ درجہ ۹۰ کے اندر واقع ہو اور اس سطح کی مساوات یہ ہے کہ

$$ط + لا + ص + ڈ + س + ٹ + ط + ع + ص + لا = ۱$$

(۲۵) کلیات

مع مع زلا زلا زے

میں کس حدود غائی کے درمیان بجائیں کہ حجم باسی مخروطی سطح مستدیر اور سطح مستوی کا معلوم ہو جائے اور سطح مستدیر کی مساوات

$$ع = ط - لا (لا + ڈ) ہے$$

اور سطح مستوی کی مساوات میں لا = ع اور لا = ع میں اور اس ترکیب سے اور کسی اور ترکیب سے اس حجم کو دریافت کرو

(۲۶) دو سطح مستدیر ع = م لا + ن ڈ اور ع = ط لا + ص کے درمیان جو حجم ملتا ہو اس کا حجم دریافت کرو اور ثابت کرو کہ حجم کیسے ہی جب

$$م = ن = ط = ص = ۱$$

(۲۷) ایک قعر اتنا ہی کہ اوچک قعر مدور ایک پورا چکر لگاتا ہے اور اس قعر کا نصف قطر ہے، اوچک کرنے میں مرکز قعر سے تو دائرہ مرشم ہوتا ہے جس کا نصف قطر س ہے اور سطح قعر کی ہمیشہ متوازی ایک سطح قائم و معین کی رہتی ہے اور سطح دائرہ عمود ہوتی ہے اور یہہہ دائرہ وہی جس پر مرکز حرکت کرتا ہے تو ثابت کرو کہ حجم قعر کا

$$سے ہے (۸ + ۸) ہے$$

(۲۸) مخروط مستدیر قائم کا محور اسطوانہ کے پیدا کرنے والے خط پر منطبق ہے اور قطر مخروط مستدیر اور اسطوانہ کا برابر ارتفاع مشترک ہے تو مخروط مستدیر جن دو تصویفیں

اسطوانہ سے تقسیم ہوتا ہے اوسکا حجم اور سطح مستدیر دریافت کرو
 حاصل سطح مستدیر $\frac{۴۷ - ۳۱}{۶} \times ۱۵۸$ ط اور $\frac{۳۱ - ۱۵۸}{۶} \times ۱۵۸$ ط ہیں
 اور حجم $\frac{۴۷ - ۳۱}{۶} \times ۱۵۸$ ط اور $\frac{۳۱ - ۱۵۸}{۶} \times ۱۵۸$ ط ہیں

اس میں ط نصف قطر مخروط مستدیر یا اسطوانہ کے قاعدہ کا ہے

(۲۹) مخروط فانہ کی شکل کا مساوات

$$س = \frac{ط}{۲} + \frac{ط}{۲}$$

سے تشخیص ہوتا ہے اور سطح لا = ۱۰ اور لا = ط کے درمیان واقع ہوتا ہے اوسکا حجم دریافت کرو

حاصل کہ $\frac{ط}{۲}$

(۳۰) ایک خط مستقیم محور سے پرگذاڑتا ہے اور اوس پر عمود ہی اسے تراش مخروطی کا ایک حجم پیدا ہوتا ہے
 اور سطح متوازیہ سے اوس کے دو تراشیں کی گئی ہیں اور دو کو سطح متوازی محور سے کے ہیں
 تو ثابت کرو کہ حجم تراش مخروطی کے مجسم کا سطح مستوی کے درمیان برابر ہوتا ہے حاصل ضرب
 سطح مستوی کے فاصلہ اور تراشوں کے نصف مجموعہ رقبوں کے اور یہ تراشیں اون سطح مستوی
 سے پیدا ہوتی ہیں

نوان باب

کلی کی جزئی بلحاظ کسی مقدار کے جو اوس کلی میں ملتف ہو

(۲۱۱) بعض اوقات بہ ضرورت ان پڑتی ہے کہ کلی کی جزئی بلحاظ کسی مقدار کے جو اوس

کلی میں ملتف ہولین اب ہم اس مطلب سے بحث کریں گے
 فرض کرو کہ سہ جزوی سطح معج (لا) زلا کی بلحاظ ص کے مطلوب ہے اور
 معج (لا) میں ص داخل نہیں ہے اور ط کو ص سے کچھ تعلق نہیں

فرض کرو کہ لو = سطح معج (لا) زلا

اور ص بدل کر میں + ۵ ص ہو چکا تو اس سبب کو بھی بدل کر لو + ۵ لو ہو چکا ہے

$$\text{لو} + \Delta = \text{ص} + \text{ط مع مج (لا) زلا}$$

$$\text{اسو اسط} \Delta = \text{لو} = \text{ص} + \text{ط مع مج (لا) زلا} - \text{ص مع مج (لا) زلا}$$

$$= \text{ص} + \text{ط مع مج (لا) زلا}$$

اب بلو جب دفعہ ۴۰ کے

$$\text{ص} + \text{ط مع مج (لا) زلا} = \Delta \text{ ص مع مج (ص} + \text{بر} \Delta \text{ ص)}$$

اسمین بر کسر واجب ہے پس

$$\frac{\Delta}{\Delta \text{ ص}} = \text{مج (ص} + \text{بر} \Delta \text{ ص)}$$

فرض کرو Δ ص اور Δ لو غیر متساوی کم ہو قی بن پس

$$\frac{\Delta \text{ لو}}{\Delta \text{ ص}} = \text{مج (ص)}$$

(۲۱۲) اسی طرح اگر لو کی جزئی بلحاظ ط کے لین اور مج (لا) کو فرض کریں کہ اوسمین

ط نہیں ہے اور ص کو کچھ تعلق ط سے نہیں ہے تو یہ سائل ہو گا کہ

$$\frac{\Delta \text{ لو}}{\Delta \text{ ص}} = - \text{مج (ط)}$$

(۲۱۳) فرض کرو کہ مج (لا) میں مقدار س شامل ہے اور مطلوب یہ ہے کہ سر جزوی ط مع مج (لا) زلا کی بلحاظ س کے دریافت کریں اور ط اور ص کو کچھ تعلق س سے نہیں ہے،

بجای مج (لا) کے ساتی کے لئے ہم مج (لا و س) لکھتی ہیں تاکہ مقدار س کا موجود نہ ہو صفائی

کے ساتھ ہمیشہ خیال میں رہے کلی کو یو سے تعبیر کرو تو

$$\text{لو} = \text{ط مع مج (لا و س) زلا}$$

فرض کرو کہ س کو س + Δ س سے بدلین تو اس تبدل کے جیت سے یو بدل کر لو + Δ لو

ہو جائیگا پس

$$\text{لو} + \Delta \text{ لو} = \text{ط مع مج (لا و س} + \Delta \text{ س) زلا}$$

$$\text{اسو اسط} \Delta \text{ لو} = \text{ط مع مج (لا و س} + \Delta \text{ س) زلا} - \text{ط مع مج (لا و س) زلا}$$

$$= \text{مباح} \left[\text{ج} (\text{لاوس} + \text{س}) - \text{ج} (\text{لاوس}) \right] \text{زلا}$$

$$\text{پس } \frac{\text{ج} (\text{لاوس} + \text{س}) - \text{ج} (\text{لاوس})}{\text{س}} = \text{مباح} \text{ زلا}$$

اب سرخزوی کی خاصیت کے موافق ہم کو بہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{س} (\text{لاوس} + \text{س}) - \text{س} (\text{لاوس}) = \text{زنج} (\text{لاوس}) + \text{فی}$$

آئین قی ایسی مقدار ہے کہ جب س غیر متناہی کم ہوتا ہے تو وہی غیر متناہی کم ہوتا ہے
پس اب بہ حاصل ہوا کہ

$$\frac{\text{س} (\text{لاوس} + \text{س}) - \text{س} (\text{لاوس})}{\text{س}} = \text{مباح} \text{ زنج} (\text{لاوس}) \text{ زلا} + \text{مباح} \text{ قی زلا}$$

آئین جب س میں غیر محدود کم ہو تو دوسری کلی معدوم ہوتی ہے اسلئے کہ وہ بڑی (س-ط) قی
سے نہیں ہی آئین قی حق الامکان نہایت بڑی قیمت قی کی اور قی آخر کو معدوم ہوتا ہے

اسی معلوم ہوا کہ حد غائی کے لینے سے

$$\frac{\text{زلا}}{\text{زس}} = \text{مباح} \text{ زنج} (\text{لاوس}) \text{ زس}$$

(۲۱۴) اس بات کو گاہہ رہنا چاہئے کہ دفعہ گذشتہ میں نہ طہ ص غیر متناہی پی اگر کوئی مفصل
غیر متناہی ہو تو ہم یہ کہان کہہ سکتے ہیں کہ (س-ط) قی بالضرور حد غائی کے اندر معدوم ہوگا
(۲۱۵) دفعہ ۲۱۳ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\frac{\text{زس}}{\text{زس}} = \text{مباح} \text{ ج} (\text{لاوس}) \text{ زلا} = \text{مباح} \text{ زس} (\text{لاوس}) \text{ زلا} \dots (۱)$$

اب اس مساوات کا محل استعمال بنانے میں اور اس کے فائدے جتنا ہے

فرض کرو کہ ج (لاوس) ابسا جملہ ہی جسکا سرخزوی بلحاظ لاکے ج (لاوس) ہی اور
ج (لاوس) ابسا جملہ ہی جسکا سرخزوی بلحاظ لاکے زنج (لاوس) ہو پس (۱) کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{زج} (\text{سوس})}{\text{زج} (\text{سوس})} = \frac{\text{زج} (\text{طوس})}{\text{زج} (\text{طوس})} = \text{حصر} (\text{سوس}) - \text{حصر} (\text{طوس}) \dots (۲)$$

فرض کرو کہ ج (لاوس) میں ص نہیں واقع ہوتا اور ط کو کچھ تعلق ص سے نہیں ہو تو (۲) کو
اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{زج (ص دس)} + \text{سی} = \text{صر (ص دس)} \quad (۳)$$

ابین سی وہ ارقام ہیں جو ص سے کچھ علاقہ نہیں کہتے یعنی مستقل بلحاظ ص کے ہیں
اسی معلوم ہوا کہ ص کی جو قیمت جاہن (۳) میں ہو سکتی ہی ص کی جگہ لا کو راہ سکتی ہیں اور اس طرح لکھتے ہیں

$$\text{صر (لا دس)} = \frac{\text{زج (لا دس)}}{\text{زس}} + \text{سی} \quad (۴)$$

اسی اوقات کو صر (لا دس) کے دریافت کرنے کے اندر کام میں لا سکتی ہیں چونکہ مقدار مستقل
ضرورت کے صورت میں داخل ہو سکتی ہے اسکو اوسکو خارج کر دیتے ہیں اور اس اوقات
(۴) کو اس طرح لکھتے ہیں کہ

$$\text{مع} \frac{\text{زج (لا دس)}}{\text{زس}} \text{ زلا} = \frac{\text{زس}}{\text{زس}} \text{ مع ج (لا دس)} \text{ زلا}$$

$$\text{مثلاً فرض کرو کہ مع (لا دس)} = \frac{۱}{۱ + \text{سی} \frac{۱}{\text{لا}}}$$

$$\text{مع ج (لا دس)} \text{ زلا} = \text{مع} \frac{\text{زس}}{۱ + \text{سی} \frac{۱}{\text{لا}}} = \frac{۱}{\text{سی}} \text{ سی} \text{ ساس لا}$$

$$\text{سی} \frac{\text{زس}}{\text{سی} \text{ ساس لا}} = \text{مع} \frac{\text{زس}}{(۱ + \text{سی} \frac{۱}{\text{لا}})} \text{ زلا}$$

$$= \text{مع} \frac{\text{سی} \frac{\text{زس}}{\text{لا}}}{(۱ + \text{سی} \frac{۱}{\text{لا}})} \text{ زلا}$$

پس قیمت مع $\frac{\text{زلا}}{۱ + \text{سی} \frac{۱}{\text{لا}}}$ کے معلوم ہونے سے ہم متناظر جزی یعنی زیادہ پیچدار کلی

$$\text{مع} \frac{\text{سی} \frac{\text{زس}}{\text{لا}}}{(۱ + \text{سی} \frac{۱}{\text{لا}})} \text{ کا استنباط کر سکتے ہیں}$$

(۱۴) مع ج (لا دس) زلا کا سرچرزی کا نا بلحاظ ص کے اوس حالات میں کہ ط اور ص

جملے س کے ہیں دریافت کرنا مطلوب ہے کلی کو نو سے تعبیر کرو تو $\frac{\text{زس}}{\text{زس}}$ میں ہیں قیمتیں ہیں

ایکے رقم تو اس سبب پیدا ہوتی ہے کہ مع (لا دس) میں س داخل ہے اور دوسری اس سبب

سے پیدا ہوتی ہے کہ ص میں س داخل ہی اور تیسری اس سبب کہ ط میں س داخل ہے

اسے معلوم ہوا کہ بموجب دفعات گذشتہ کے عمل کرنے سے

$$\frac{\text{زلا}}{\text{زس}} = \text{مع} \frac{\text{زج (لا دس)}}{\text{زس}} \text{ زلا} + \frac{\text{زلا}}{\text{زس}} \frac{\text{زس}}{\text{زس}} + \frac{\text{زلا}}{\text{زس}} \frac{\text{زس}}{\text{زس}}$$

$$= \text{مع} \frac{\text{زج (لا دس)}}{\text{زس}} \text{ زلا} + \text{مع (ص دس)} \frac{\text{زس}}{\text{زس}} - \text{مع (لا دس)} \frac{\text{زس}}{\text{زس}}$$

اس میں ایک کوئی مقدار مستقل ہے پس آخر کو یہ حاصل ہو گا کہ

$$م = (لا) = ۱ - \frac{۱}{لا}$$

اسے خط منحنی مطلوب تشخیص ہوتا ہے

(۲۲۰) م = (لا) کی اسی صورت دریافت کرو کہ س کے نام قیمتوں کے واسطے

$$\frac{س}{م} = \frac{سباح [م] (لا) [لا] زلا}{سباح [م] (لا) [لا] زلا}$$

اور بموجب فرض کے

$$سباح [م] (لا) [لا] زلا = سباح [م] (لا) [لا] زلا$$

اب بلحاظ س کے سرچڑی لوتو

$$س [م] (س) [س] = \frac{۱}{س} سباح [م] (لا) [لا] زلا + \frac{۱}{س} سباح [م] (س) [س]$$

$$پس س (۱ - \frac{۱}{س}) [م] (س) [س] = \frac{۱}{س} سباح [م] (لا) [لا] زلا$$

پھر بلحاظ س کے سرچڑی لوتو

$$(۱ - \frac{۱}{س}) [م] (س) [س] + \frac{۱}{س} س (۱ - \frac{۱}{س}) [م] (س) [س] = \frac{۱}{س} سباح [م] (س) [س]$$

اسی معلوم ہوا کہ (۱ - \frac{۱}{س}) [م] (س) [س] + \frac{۱}{س} س (۱ - \frac{۱}{س}) [م] (س) [س] = \frac{۱}{س} سباح [م] (س) [س]

$$اس واسطے \frac{سباح [م] (س) [س]}{سباح [م] (س) [س]} = \frac{۱ - \frac{۱}{س}}{(۱ - \frac{۱}{س})^۲} \cdot \frac{۱}{س}$$

کل لوتو

$$لوگ م = (س) = \frac{۱ - \frac{۱}{س}}{(۱ - \frac{۱}{س})^۲} لوگ س + مقدار مستقل$$

$$اس واسطے م = (س) = ۱ - \frac{۱}{س}$$

اس میں ایک کوئی مقدار مستقل ہے پس آخر کو یہ حاصل ہو گا کہ

$$م = (لا) = ۱ - \frac{۱}{لا}$$

یہ علم ادا تہ تحلیل کے اس سوال کا حل ہے جو ہمیں مسئلہ کے قطعہ کے مرکز ثقل کا بعد اس سے

۱۔ وان حصہ ارتفاع قطعہ کا ہے تو وہ خط منحنی دریافت جبکی حرکت کستہ شدیر مبدیہ ہوتا ہے مساوات مطلوب $س = مَج (لا)$ ہے

(۲۲۱) $مَج (لا)$ کی وہ صورت دریافت کرو کہ کلی سابع $\frac{مَج (لا) زلا}{ماس - لا}$ بالکل بے تعلق

س سے ہو فرض کرو کہ $مَج (لا)$ بے تعلق س سے ہے

کلی کو لو سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ $لا = س$ سے تو

$$لو = سابع \frac{مَج (لا) زلا}{ماس - لا} = ابع ماس مَج (س) (س) زے$$

(۱-۱) ماس

چونکہ بویہ تعلق س سے ہی تو سرخرابی لو کا بلحاظ س کے معدوم ہو جائیگا اب

$$زے = ابع \frac{مَج (س) (س) زے + ماس مَج (س) (س) زے}{ماس - لا} = ابع مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲$$

خواہ س کجی ہی ہو یہہہ اخر کلی معدوم ہوگی اگر $مَج (لا)$ بالکل بے تعلق س سے نہ ہو تو یہہہ کجی

ضرور نہ ہوگا کہ $مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲$ ہمیشہ معدوم ہی ہو اس واسطی کہ ایسی ایک کلی جیسے

سابع جم لکے زلا ہی معدوم ہوتی ہی خواہ س کی کجی ہی قیمت ہو لیکن اس سبب سی کہ

$مَج (لا)$ بے تعلق س سے فرض کیا گیا ہے یہہہ حاصل ہونا چاہیے کہ

$$مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲ = ۰$$

وجہ اسکی یہہہ ہے کہ فرض کرو $مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲$ ہمیشہ صفر نہ ہو تو لا صفر سے

زیادہ ہوتا ہے تو علامت $مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲$ میں کجی تغیر بعض بون کے اندر نہیں واقع ہوگا

اور یہہہ یون سو فوٹ س پر نہ ہوگا مثلاً یہہہ تغیر $لا = ط تک$ نہ واقع ہو تو کلی

طبع $مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲$ زلا معدوم نہیں ہو سکتی کیونکہ ہر جزیرہ کیسی کی ایک ہی علامت

۲۲۱ (ظ-لا)

اسی معلوم ہوا کہ $مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲ + مَج (لا) ۲$ صفر ہونا چاہیے

$$\frac{۱}{۱۲} - \frac{مَج (لا)}{مَج (لا)} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

اس میں ایک کوئی مقدار مستقل ہے

یہ علم حرکت کے اس سوال کا حل ہے کہ ایسا خط منحنی دریافت کرو کہ خط منحنی کے قوس پر گزرنے کے وقت کسی نقطہ سے کسی بجی کے نقطہ تک ایک ہی ہو اگر سو قوس خط منحنی ہو جو کسی بجی کے نقطہ سے ناپاکی ہو اور لافنی متحدہ طرف صوکا ہو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{ز صو}{لا} = \text{بج (لا) اور صو} = ۲ لا$$

پس خط منحنی خط تدویر ہے (دفعہ ۷۲)

امثلہ مختلفہ

(۱) اگر خط مستقیم ص ع ا ع م ع م خط بیچان متساوی الزوا یا کی تین متواتر محرکوں سے ملے اور مساوات خط بیچان کی لو = ط نقاط ع ا اور ع م اور ع م پر ہو تو ع ا ع م اور ع م ع م اور دو خطوط منحنی ع ا ع م اور ع م ع م کو درمیان جو رقبہ واقع ہو اس سے دریافت کرو

حاصل $\frac{۱}{۲ \text{ لوک ی}}$ (ع م ع م)

(۲) خط منحنی ۱ - ط لا ۲ + لا ۳ = ۰ کا رقبہ دریافت کرو

حاصل $\frac{۳۲}{۱۴}$ کے ط

(۳) خط منحنی لا ۲ + لوک = ط (لا ۳) کا رقبہ دریافت کرو اس میں ن مثبت صحیح ہے

حاصل اگر ن جنت صحیح ہو تو $\frac{ط}{۲}$ کے اگر ن طاق صحیح ہو تو $\frac{ط}{۲}$ کے

(۴) ایک بیضہ کے احاطہ کے برابر طول ایک رے کا ہے اور رے اس بیضہ پر لپٹی گئی ہے اور کسی نقطہ پر رے کو ل کر لغت بنایا جاتا ہے تو ثابت کرو کہ جب طول لغت کا

حد غائی زیادتی کی یا کمی کی کتنی ہو تو طول رے کا برابر دائرہ انحناء کے محیط کے ہوگا

۱۱۔ یہی دائرہ انحناء اس نقطہ کا ہے جس پر رے کھلتی ہے

(۵) (سطوح لا + لا - لو = ۰) کا حصہ جو دو سطوح

ط + لا + ص + س = س اور ط + لا + ص + س = س کے درمیان واقع ہو

اوسے دریافت کرو

حاصل کہ (ط - ط) لٹ

س

(۴) مجسم قریب البعضوی $\tau + \tau = \tau$ ط (لا + ط) اور کرہ لا + $\tau + \tau = \tau$

سے جو مجسم احاطہ ہوتا ہے اوسکا حجم دریافت کرو حاصل کہ ط (س - ط) (ط)

دسواں باب

بعضوی کلیات

(۲۲۲) کلیات مع $\frac{\text{زیر}}{\text{س}} (1 - \text{س جبب بر})$ زیر

اور مع $\frac{\text{زیر}}{\text{س}} (1 + \text{ط جبب بر}) (1 - \text{س جبب بر})$ کو بعضوی جملہ با بعضوی کلیات

اول اور دوم اور سوم مرتبے کا کہتے ہیں اول مرتبہ (س و بر) سے اور دوم مرتبہ

می (س و بر) سے اور سوم مرتبہ (س و ط و بر) سے تعبیر ہوتا ہے کلیات

حدود وغائی۔ اور بر کے اندر لی گئی ہیں اس سبب کلی بر کے ساتھ معدوم ہوتی ہے اور

بر کو دست جملہ کہتے ہیں اور مقدار مستقل س واحد سے کم فرض کی گئی ہے اور اوسکو

قابل جملہ کا کہتے ہیں اور مقدار جو تیسری مرتبہ کے جملہ واقع ہوتی ہے مقدار مستقل کہلاتی ہے

پس جب حدود وغائی۔ اور کچے کے درمیان کلیات لئی جائیں تو ادا کو مکمل جملہ کہتے ہیں

یعنی دست جملہ کامل کی کچے ہے

(۲۲۳) دوسری مرتبہ کا بعضوی جملہ اوس قوس بعضوی کا طول تعبیر کرتا ہے جو طرف

کلاں سے پائش کیا جاے اور بعضوی کے نسبت خارج المکزی قابل جملہ کا ہو یہی وجہ تسمیہ بعضوی

جملوں کے ہی اور سوا اسکے یہ بات بھی ہے کہ ان تینوں کلیوں کا ارتباط بعضوی

کی عجیب خاصیتوں کے نسبت سے ہوا ہے

(۲۲۴) مسئلہ بعضوی کلیات کا اور اوسکی تحقیقات کا ایک جز علم حساب کلیات کا ہے

اور اس سبب از زمانہ میں بہت توجہ ہوئی ہے اس کے ہم چند نتائج اسان اسان تحریر کر رہے ہیں اگر اس مضمون کی تکمیل کسی کو زیادہ منظور ہو تو وہ بعض اور کتابوں کو دیکھ کر جن میں ہم مضمون لبط کے ساتھ لکھا ہے

(۲۲۵) اگر سیر اور سرانساوات میں مربوط ہوں کہ

$$ج (س و بر) + ج (س و سر) = ج (س و لب)$$

اسمین لب ایک مقدار متقل ہے تو

جم برجم سر۔ جب برجب سر (۱۔ ۱۱ جیٹا لب) = جم لب

برا اور سر کو ایک نئی مقدار طے کے جملہ ٹھراؤ اور مساوات معلوم کے جزئی لو تو

$$(1) \quad \frac{1}{\text{زبط}} = \frac{1}{\text{ہا (۱-س جیٹ ہا)}} + \frac{1}{\text{ہا (۱-س جیٹ ہا زبط)}}$$

اب چونکہ طو ایک جدید اختیاری مقدار متغیر ہے تو یہ فرض کر لیں گے کہ اختیار ہے کہ

نمبر = (۱-۱۰۰) جیٹا

مساوات (۱) سے

زیرے = - (۱- سبباً سر)

ان دو مساتوں کا مجذور کرو اور جزئی نکالو تو

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$$\text{اوسط} = \frac{\text{نیا (بر + سر)}}{\text{نظ}} = \frac{\text{نیا}}{2} - \frac{\text{نیا (بر + سر)}}{2}$$

فرض کرو کہ $بر + سر = صبح$ اور $بر - سر = صہرین$

نہا صبح = سب صبح جم اور نہا صبح = سب صبح جم

اور نیز $\frac{زج}{زط} = \left(\frac{زج}{زط} \right) - \left(\frac{زج}{زط} \right) = \dots$ تا جب معجب صر

$$E_m = \frac{\frac{E_{rj}}{Z_{rj}}}{\frac{Z_m}{Z_r} \cdot \frac{E_r}{Z_r}} \quad \text{یا} \quad E_m = \frac{\frac{E_{rj}}{Z_{rj}}}{\frac{Z_m}{Z_r} \cdot \frac{E_r}{Z_r}} \quad \text{ک$$

اسو^{سط} زٹو (لوگ زٹو) = زٹو لوگ جب ہر اور زٹو (لوگ زٹو) = زٹو لوگ جب ہر

اسو^{سط} لوگ زٹو = لوگ جب ہر + مقدار منتقل

اسو^{سط} زٹو = زٹو { ا جب ہر } (۲)

اسی کے متناہر زٹو = ب جب ہر

اسی اور ب مقادیر منتقل ہیں

اسی معلوم ہوا کہ ا جب ہر زٹو = ب جب ہر زٹو

اسو^{سط} ا جم ہر = ب جم ہر + س (۳)

اب اصل مساوات معلوم میں ہم دیکھتی ہیں کہ اگر سر = ۰ ہو تو

ج (س و بر) = ج (س و ب)

اسو^{سط} بر = ب اور ہر = ج = ب

پس (س) سے (ا-ب) جم ب = س

تو ا جم (بر-سر) = ب جم (بر+سر) + (ا-ب) جم ب

اسو^{سط}

(ا-ب) جم بر جم سر + (ا+ب) جب بر جب سر = (ا-ب) جم ب (۴)

(۲) میں زٹو کے قیمت

ما (ا-س) جب بر - ما (ا-س) جب سر

اور زٹو کی قیمت

ما (ا-س) جب بر + ما (ا-س) جب سر رکھو

اور پھر فرض کرو کہ سر = ۰ تو

ما (ا-س) جب ب = ا = ا جب ب

اور ما (ا-س) جب ب + ا = ۰ جب ب

۱۔ ب اور ۱ + ب کو (۴) میں رکھو تو

جم برجم سر۔ جب برجب سر ۱ (۱۔ س جیب ۱) = جم ۱
(۲۲۴) یہ ربط جواہی دریافت ہوا ہے وہ ایک اور مختلف صورت میں بیان ہو سکتا ہے
ساوات کو حذرون سے پاک صاف کرو تو

(جم برجم سر۔ جم ۱) = (۱۔ س جیب ۱) جیب ۱ برجب سر

اسو ۱

جم ۱ بر۔ جم ۱ سر + جم ۱ لب - ۲ جم ۲ سر جم ۱ لب
= ۱۔ س جیب ۱ لب جیب ۱ برجب سر

جم ۱ سر جم ۱ لب کو طرفین پر زیادہ کرو اور منتقل کرو تو

(جم ۱ بر۔ جم ۱ سر جم ۱ لب)

= ۱۔ جم ۱ سر۔ جم ۱ لب + جم ۱ سر جم ۱ لب - س جیب ۱ لب جیب ۱ برجب سر

= جیب ۱ سر جیب ۱ لب (۱۔ س جیب ۱ بر)

اسو ۱ جم ۱ بر = جم ۱ سر جم ۱ لب + جب ۱ سر جب ۱ لب ۱ (۱۔ س جیب ۱ بر)

مثبت علامت جذر کی لیتی جا رہی کیونکہ جوق بر = ۰ سر = لب کے حامل ہوگا

(۲۲۶) اب ہم یہ بیان کرتے ہیں کہ بیضوی جملہ اول مرتبہ کا کسطع مختلف قالب کے جملہ

کے ساتھ مربوط ہوتا ہے

فرض کرو کہ ج (س و بر) جملہ کو تعبیر کرے

پس بر = $\frac{\text{جب ۱ سر}}{\text{س + جم ۱ سر}}$ کے فرض کرو

تو $\frac{1}{\text{جم ۱ بر}} = \frac{\text{ز سر}}{\text{ز سر}} = \frac{۲ (۱ + \text{س جیب ۱ سر})}{(س + جم ۱ سر) ۲}$

اسو ۱ $\frac{\text{سط}}{\text{ز سر}} = \frac{۲ (۱ + \text{س جیب ۱ سر})}{۲ + ۱ س + جم ۱ سر + س ۲}$

$$\text{اور } ۱ - \text{س}^۲ \text{ جب } ۲ \text{ بر } ۱ - \frac{\text{س}^۲ \text{ جب } ۲ \text{ سر}}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲} = \frac{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲} =$$

اسو اسطے

$$\text{مع } ۱ - \text{س}^۲ \text{ جب } ۲ \text{ بر } ۱ - \frac{\text{س}^۲ \text{ جب } ۲ \text{ سر}}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲} = \frac{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲} =$$

مع $۲ = \frac{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲} = \frac{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}$

مقدار مستقل زیادہ نہیں کی گئی ہے کیونکہ سر معدوم بر کے ساتھ ہوتا ہے پس

ح (س دبر) = $\frac{\text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}$ ح (س دسر) اس میں

س = $\frac{\text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}$ اور مس بر = $\frac{\text{س}^۲ \text{ جب } ۲ \text{ سر}}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}$

اس اخرا تباط کو اسطرح لکھ سکتے ہیں کہ

س جب بر = جب (۲ سر - بر)

س اٹرا بہ نسبت س کے ہے پس اسو اسطے

$$\frac{\text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲} = \frac{\text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}$$

اور چونکہ س چھوٹا واحد سے ہے تو $\frac{\text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲}$ بہ نسبت س (۱ + س) کے ہے

اگر سر = کچے تو بر = کہ پس

$$\frac{\text{س}^۲}{\text{س}^۲ + ۱ \text{ جم } ۲ \text{ سر} + \text{س}^۲} = \text{ح (س د کچے)} = \text{ح (س د کہ)} = \text{ح (س و کچے)}$$

(۲۲۸) اس مضمون میں ایک اور مسئلہ لکھتے ہیں اور وہ یہ ہے کہ بیضوی جملہ

مرتبہ دوم کا ارتباط مثل حملیاء مرتبہ اول دفعہ ۲۲۵ کے لکھتے ہیں

اگر جم بر جم سر - جب بر جب سر = (۱ - س) جب لب = جم لب

نوی (س دبر) + می (س دسر) - می (س دلب) = س جب بر جب سر جب لب

ساوات معلوم کے سبب جو جملوں کی دستوں کو مربوط کر رہی ہے ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ

می (س دبر) + می (س دسر) - می (س دلب) = ح (بر)

جزی لوتو

$$\begin{aligned} \text{ح بر} &= \text{ما} (۱-۱) \text{ جب بر} + \text{ما} (۱-۱) \text{ جب بر} \\ &= \text{جم بر} - \text{جم بر} + \text{جم بر} - \text{جم بر} \\ &= \text{جم بر} - \text{جم بر} + \text{جم بر} - \text{جم بر} \\ &= \text{جم بر} - \text{جم بر} + \text{جم بر} - \text{جم بر} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{لیکن جب بر} + \text{جب بر} + \text{جم بر} + \text{جم بر} \\ &= ۱ + \text{جم} + \text{ما} \text{ جب بر} + \text{ما} \text{ جب بر} \\ &= \text{پس ح (بر)} = \text{ما} \text{ جب بر} \end{aligned}$$

اسو اسطے کلی لینی سے

ح (ر) = ما جب بر جب لب
کوئی مقدار مستقل نہیں زیادہ کی گئی ہے کیونکہ ح (بر) بظاہر بر کے ساتھ محدود ہوتی ہے
اگر لب = - کپے تو حاصل مطابق دفعہ ۴۲ کے مسئلہ فیک نینی کے ہوگا اور
یہ بات آسانی سے ہمارے بعض تشریحات کے لکھنی سے سمجھ میں آجائیگی
دفعہ ۴۲ کے موافق یہ ارتباط حاصل ہے کہ

$$\begin{aligned} \text{ی} \text{ لا} \text{ لا} - \text{ط} (\text{لا} + \text{لا}) + \text{ط} = ۰ \\ \text{اسین لا} = \frac{\text{ط جم بر}}{\text{ما} (۱-۱) \text{ جب بر}} \text{ اور لا} = \frac{\text{ط جم بر}}{\text{ما} (۱-۱) \text{ جب بر}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اسے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ} \\ \text{ما} \text{ جب بر جب بر} - \text{جم بر} (۱-۱) \text{ جب بر} - \text{جب بر} (۱-۱) \text{ جب بر} \\ &+ (۱-۱) \text{ جب بر} (۱-۱) \text{ جب بر} = ۰ \\ \text{یعنی ما} \text{ جب بر جب بر} + \text{ما} (۱-۱) \text{ جب بر} - \text{جب بر} (۱-۱) \text{ جب بر} \\ &+ \text{جب بر} (۱-۱) \text{ جب بر} = ۰ \end{aligned}$$

$$\text{یعنی ما} (۱-۱) \text{ جب بر} + \text{ما} (۱-۱) \text{ جب بر} - \text{جب بر} (۱-۱) \text{ جب بر} = ۰$$

یعنی $\frac{1}{2}$ جیب $\frac{1}{2}$ بر جیب $\frac{1}{2}$ سر $1 -$ جیب $\frac{1}{2}$ بر $-$ جیب $\frac{1}{2}$ بر $=$

اس ارتباط کو اس صورتوں میں رکھہ سکتے ہیں کہ

$$(1 - \frac{1}{2}) \text{ جیب } \frac{1}{2} \text{ بر جیب } \frac{1}{2} \text{ بر} = \frac{1}{2} \text{ جیب } \frac{1}{2} \text{ بر}$$

$$\text{جیب } \frac{1}{2} \text{ بر} = \frac{1 - \frac{1}{2} \text{ جیب } \frac{1}{2} \text{ بر}}{\frac{1}{2} \text{ جیب } \frac{1}{2} \text{ بر}}$$

$$\text{جیب } \frac{1}{2} \text{ بر} = \frac{1 - \frac{1}{2} \text{ جیب } \frac{1}{2} \text{ بر}}{\frac{1}{2} \text{ جیب } \frac{1}{2} \text{ بر}}$$

امثلہ متفرقہ

(۱) مساوات جس سطح مستدیر کی

$$\frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3}$$

اسے جو مجسم احاطہ ہوا اسکے دریافت کرو

ماحصل اگر جذر کے علامت کے ساتھ مثبت کی قید لگائیں تو کہ ط

(۲) سطح جکی مساوات

$$\left(\frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3}$$

اوسے جو مجسم احاطہ کیا جائے اوسے دریافت کرو حاصل $\frac{2}{3}$ کہ ط ص س

(۳) ایک سطح مستدیر کی مساوات

$$\frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3}$$

اور جو مجسم اسے احاطہ ہوتا ہے اوسکے اوس حصہ کا حجم جو سطح مستدیر کے لایہ کی مثبت جانب میں واقع ہو

ثابت کرو کہ $\frac{2}{3}$ کہ ط ہے

(۴) قیمت سطح زمرے دریافت کرو اس میں زمرہ جزئی کی سطح مستدیر کہہ کو تعبیر کرتا ہے

یعنی اس جزئی کی سطح کا بعد ایک نقطہ معین سے ہے اور یہ نقطہ باہر کرہ سے ہے

اور کلی نام سطح مستدیر کہہ پر پہنچتی ہے

$$\text{ماحصل} \left[\frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} \right] \left[\frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} \right] \left[\frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \text{ ط } \frac{2}{3} \right]$$

کرہ کا اور س بعد نقطہ معین کا مرکز کرہ سے ہے

(۵) ایک اسطوانہ ایک ہی سلقہ خط منحنی $ل = ط$ حجم برابر بنایا گیا ہو اور اسطوانہ کے پیداکرنے والے خطوط مستقیم عمود خط منحنی کے سطح مستوی پر مت کرہ $لا + و + ع = ط$ کے سطح مستدیر کے اور جس کو جو اسطوانہ کے اندر سمائی ہے اور جتنا اسطوانہ کرہ کے اندر سماتا ہو اسکا حجم دریافت کرو

$$\text{ماحصل رقبہ} = \frac{ط^۲}{۴} (۱ - \frac{۱}{۴})$$

$$\text{حجم} = \frac{ط^۳}{۳۲} (\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۱۶})$$

$$(۶) \text{خط منحنی } لا - ۳ ط لا + و + ع = ۰$$

کے حصہ متقیہ کے چکر کھانے سے جو مجسم پیدا ہو اسکا حجم دریافت کرو اور یہ چکر خط مستقیم $لا + و = ۰$ پر لکھا ہے

(۷) دو برابر دور اسطوانین میں اور انکا نصف قطر ط ہے

اگر انکے محور زاویہ صبر قطع کریں تو حجم مشترک دونوں کے اندر $\frac{۱۳}{۱۶} ط$ جب تک ہوگا اور سطح مستدیر جو ایک کی دوسری کی اندر سمائی ہے $\frac{۹}{۱۶} ط$ ہوگی

(۸) دائرہ متغیر کا مرکز ایک دائرہ معین کے محیط پر گردش کرتا ہے اور سطح مستوی عمود المماس دائرہ معین کی ہے اور اسکا نصف قطر برابر اس بعد کے ہے جو مرکز قطر

معین سے رکھتا ہو جو حجم پیدا ہوتا ہے اسکو دریافت کرو اور اس سطح جو مجسم پیدا ہوتا ہو وہ قطر معین کے گرد چکر کرے تو ثابت کرو جو مجسم کا حصہ اندر چلا جائیگا اسکو کل حجم جو نسبت ۵ اور ۱۱ کی ہوگی

(۹) دائرہ معلوم کا نصف قطر = ط اس کے قطر پر مرکز مسدس منظم کا حرکت کرتا رہی اور سطح

مسدس کی عمود اس قطر پر ہی اور اس کے مقدار اس طرح سے متغیر ہوتی جاتی ہے کہ

اس کے دونوں میں سے ایک دندر دائرہ کے وتر پر منطبق ہوتا ہے ثابت کرو کہ مجسم جو

پیدا ہوتا ہے وہ $\frac{۳۵}{۳۲} ط$ ہے ثابت کرو کہ سطح مستدیر مجسم کی

$$ط (۲ + ۳\sqrt{۳}) =$$

(۱۰) ثابت کرو کہ

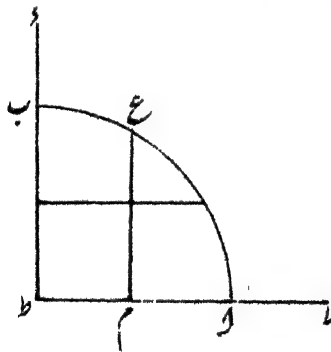
$$\frac{1}{16} = \frac{ط}{۳۲} = \frac{رلا}{(۲-ط)(۲-۲ط)} = \frac{ط}{(۲-ط)(۲-۲ط)}$$

گیارہواں باب

ضعاف کلی میں تغیر مقدار میں تغیر کا

(۲۲۹) دفعہ ۴۲ میں ہم نے لکھا ہے کہ کلی مشاۃ

صباح صبح سج (لاؤ) زلازلی برابر صبح سج (لاؤ) زلازلی کی ترتیب کی تبدیلی میں
حدود غائی مستقل ہوں یعنی کلی یعنی کی ترتیب کی بدل دیں دو نو کلیوں کی حدود غائی میں
کوئی تغیر نہیں پیدا ہوتا ہے مگر حالت میں کہ اول کلی حدود غائی جملے کسی اور مقدار میں تغیر کرے
تو دوسری مذکورہ مستحکم نہیں رہتا چنانچہ اس کا بیان ساتویں اور آٹھویں باب میں کیا گیا ہے
اب ہم بعض اور مثالیں زائد لکھتے ہیں
(۲۳۰) کلی طبع $\frac{ط}{۱۶}$ صبح سج (لاؤ) زلازلی میں ترتیب کو بدلو



کلی جو لچاؤ کے لمبی چپے او سکی حدود غائی $ط = ۰$ اور $ب = ط$ ہیں

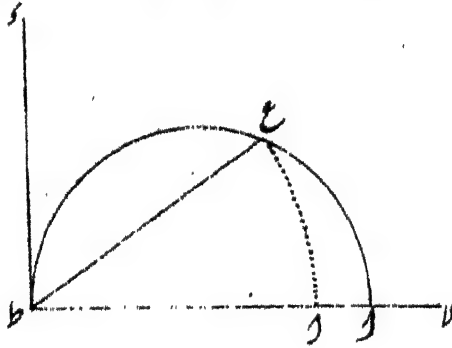
یعنی ہم کلی کو بنیاد پر کرنے میں کہ وہ محور سے دائرہ کے احاطہ تک پہنچتی ہے اور اس دائرہ
کا مرکز مبدا ہے اور نصف قطر برابر ط کے ہے پس کلی لچاؤ کے محور سے ربع کے
انتہا کے نقطہ تک پہنچتی ہے پس اگر $ط = ۰$ (لاؤ) کو مساوات سطح بندیر کی

خیال کریں تو اوپر کی کلی شہادہ اوس حجم کے جو کو تعبیر کرتا ہے جو سطح مندر اور سطح مستوی (لا دی) کے
اور ایک خط مستقیم کے درمیان واقع ہوتا ہے اور یہ خط مستقیم اس سطح مستوی پر عمود وار گزرتا ہے
احاطہ $\overline{ط\lambda\epsilon\beta}$ کے حرکت کرتا ہے

اب شکل سے یہ ظاہر ہے کہ اگر کلی بلحاظ لا کے اول لین تو حدود غائی $\lambda = 0$
اور $\lambda = \overline{ط\alpha}$ ہوں گیں اور اس سب سے حدود غائی کی $\epsilon = 0$ اور $\epsilon = \overline{ط\beta}$
ہوں گیں پس بہت بدلی ہوئی کلی

طبع $\overline{ط\alpha} - \overline{ط\beta}$ مع $\overline{ط\gamma}$ (لا دی) زو زلا ہے

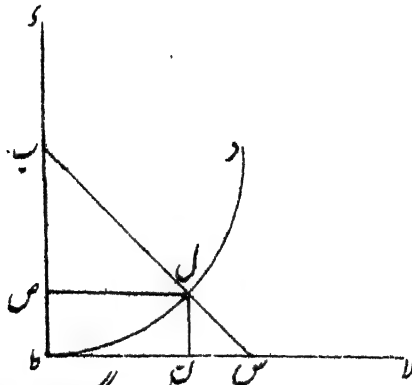
(۲۳۱) کی مع $\overline{ط\delta}$ مع $\overline{ط\epsilon}$ (لی و بر) لی زبر زلی میں ترتیب کلی کو بدلو



فرض کرو کہ $\overline{ط\alpha} = 2$ اور نصف دائرہ $\overline{ط\epsilon}$ کو قطر بنا کر کہنچو اور $\overline{ط\epsilon} = 1$ بر کے
فرض کرو تو $\overline{ط\epsilon} = 2$ حجم بر پس کلی شہادہ کو مع (لی و بر) لی ϵ بر ϵ لی کی قیوتوں
مجموعہ کی حد غائی خیال کر سکتی ہیں اور یہ قیمتیں تمام رقبہ نصف دائرہ پر لمبائی ہین
پس اسی معلوم ہوا کہ جب ترتیب بدلیں تو بر کی کلی سے حجم $\overline{ط\delta}$ مک اور
لی کے سے $\overline{ط\delta}$ مک لین

پس کلی بہت بدلی ہوئی
طبع $\overline{ط\alpha} - \overline{ط\beta}$ مع $\overline{ط\gamma}$ (لی و بر) لی زلی زبر

(۲۳۲) $\overline{ط\alpha} - \overline{ط\beta}$ مع $\overline{ط\gamma}$ (لا و بر) زلا زلی میں کلی کی ترتیب کو بدلو



و کے واسطے کلی $\frac{لا}{س}$ سے $س = ط - لا$ تک لی گئی ہے مساوات $\frac{لا}{س} = \frac{لا}{ط}$ قریب البیض
 ط سے علاقہ رکھتی ہے اور $س = ط - لا$ - لا خط مستقیم ب ل س کی ہے اور یہ خط
 عرض مستقیم قریب البیضوی کی طرف ل پر گذرتا ہے
 پس کلی تمام رقبہ ط ب ص ط پر پہنچتی ہی اب کلی کی ترتیب کو بدلو اور سطح بسیط
 ط ل ص اور ب ل ص پر جدا جدا خیال کرو بسیط ط ل ص کے واسطے کلی
 لا = ۰ سے لا = ۲ تک ایک لیتی چاہی اور پھر ۰ سے $س = ط$ تک اور
 بسیط ب ل ص کو دو اٹلا = ۰ سے لا = ط - س تک اور پھر $س = ط$ سے $س = ط$ تک
 پس کلی بہت بدلی ہوئی

ط مع لا ط مع مح (لا و) زد زلا + ط مع س ط مع ص (لا و) زد زلا ہے
 (۲۳۳) اس مع لا (۲-۱) مع مح (لا و) زد زلا کی ترتیب کو بدلو
 یہاں کلی لمحات کے $س = لا$ سے $س = لا$ (۲-۱) تک کی گئی ہے مساوات $\frac{لا}{س} = \frac{لا}{ط}$ خط مستقیم
 اور $س = لا$ (۲-۱) قریب البیضوی کو تعبیر کرتی ہے اب علم اگر شکل پر امتحان کر لیا تو کلی
 بہت بدلی ہوئی یہ ہونگی کہ

مع ۱-۱ (۱-۱) مع مح (لا و) زد زلا

(۲۳۳) ط مع $\frac{ط+لا}{ط-لا}$ مع مح (لا و) زد زلا کی ترتیب کو بدلو

یہاں کلی بلحاظ کے $s = \sqrt{a^2 - b^2}$ سے $s = a + b$ تک کی گئی ہے اور اس بات

$s = \sqrt{a^2 - b^2}$ دائرہ کو اور $s = a + b$ خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے

شکل پر طالب علم کو امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ جب کلی بلحاظ لاکے اول لیجائیگی
کلی کو تین حصوں میں تقسیم کرنا چاہیے اور کلی ہٹ بدلی ہوئی یہ ہوگی کہ

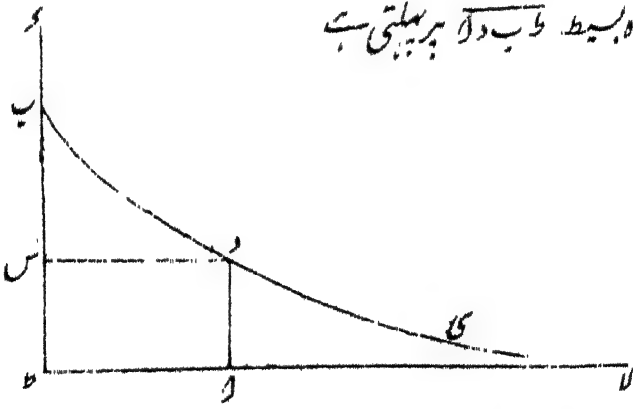
طبع $\sqrt{a^2 - b^2}$ طبع s (لاؤ) زو زلا + طبع b طبع s (لاؤ) زو زلا

+ طبع b طبع s (لاؤ) زو زلا

(۲۳۵) طبع $\sqrt{a^2 - b^2}$ طبع s (لاؤ) زو زلا میں کلی کی ترتیب بدلو

یہاں کلی بلحاظ کے $s = 0$ سے $s = \frac{a+b}{2}$ تک کی گئی ہے اس بات $s = \frac{a+b}{2}$ طبع b طبع s (لاؤ) زو زلا

تعبیر کرتی ہے فرض کرو کہ ب دبی بعید البضوی ہے اور $s = \frac{a+b}{2}$ طبع b طبع s (لاؤ) زو زلا کر سکتے ہیں
کہ وہ بسیط و ب دہا پر پہنچتی ہے



فرض کرو کہ کلی ترتیب بدلی گئی تو ہم کو بسیط ط ا د س اور س د ب پر جدا جدا خیال کرنا چاہیے

بسیط ط ا د س کے واسطے کلی $s = 0$ سے $s = a$ تک اور پھر $s = 0$ سے

$s = \frac{a+b}{2}$ تک یعنی چاہی اس واسطے بسیط س د ب کی کلی $s = 0$ سے

$s = \frac{a+b}{2}$ (۱-۲) تک اور پھر $s = \frac{a+b}{2}$ سے $s = a$ تک یعنی چاہیے پس

کلی ہٹ بدلی ہوئی

طبع $\sqrt{a^2 - b^2}$ طبع s (لاؤ) زو زلا + طبع b طبع s (لاؤ) زو زلا ہے

(۲۳۴) جمع س۔ س۔ لاسع ج (لاوے) زلا زے من کلی کی ترتیب کو بدلو

یہاں $\text{س} = \text{س۔ لاسع ج}$ کلی ہست بدلی ہوئی
 لاسع ج جمع (لاوے) زلا زے + س۔ لاسع ج جمع (لاوے) زلا زے ہے

(۲۳۵) طمع لاسع جمع ج (لاوے) زلا زے من کلی کی ترتیب بدلو

یہاں کلی تمام محروم کے اندر پہنچتی ہے اور محروم طمع متروک و اساطیر ہوگا جس کے مساوی متن

ے = ۱۰ اورے = و اورے = لا اور لا = طہین

کلی کو مختلف طرح سے ہم تے سکتے ہیں اور سطح ہم کو بہرہ حاصل ہوتا ہے کہ

طمع طمع جمع ج (لاوے) زلا زے

یا طمع جمع ج (لاوے) زلا زے

یا طمع جمع ج (لاوے) زلا زے

یا طمع جمع ج (لاوے) زلا زے

یا طمع جمع ج (لاوے) زلا زے

بہرہ بدلات ہوتوں کے ج (لاوے) کے جگہ سادہ جملہ رکہ کر ثابت ہو سکتی ہیں

اور خفیف میں کلیاں حاصل ہوتے ہیں مثلاً اگر ج (لاوے) کی جگہ واحد کو

رکھیں تو $\frac{7}{4}$ چون صورتوں میں سے ایک کی قیمت ہوگی

(۲۳۸) اس مطلب کے سمجھنے کے واسطے یہ مثالیں کافی ہوں گیں اور یہہ نامک کے بقاعدے

استان ہست بدلی ہوئی کلیات کے حدود غائی کے واسطے بیان کئے جائیں یہہ بھی

قطعی ضروری تہیں کہ شکلیں ہی ایسی بنائی جائیں جیسے ہم نے بنائی ہیں

وجہ اسکی یہہ ہے کہ کوئی علم شکلوں سی ایسا نہیں حاصل ہوتا کہ وہ اس بات پر غور کرنے سے

نہ حاصل ہوتا ہو کہ مختلف قیمتیں جو مقدار متغیر کی اسلی ہوئی جاہی کہ کلی اوس سطح

پر پہلے جو حدود غائی معلوم سے مفہوم ہو مگر شکلوں کے پہنچنے سے یہہ فائدہ ضرور ہے

کہ نتیجہ جلدی سے صحیح نکل آتا ہے
اب ہم اس مسئلہ کا ذکر کرتے ہیں کہ مطلب اقصیٰ اس باب کا ہر یعنی ضعات کلی میں متغیر
کا تبدیلی اول صورت ہم کلی مشاہد کی لگتی ہیں

(۲۳۴) سوال جب حاصل کرنا پیش نظر ہے وہ یہ ہے کہ کلی مقام مع مع سے زلازل کی
ہی اور اوس میں مہ جملہ لا اور دکا ہے اوسکو دوسری کلی مشاہد کی صورت میں بدل دوسری
لو اور مو مقدار میں تغیر ہونے اور پہلے مقدار میں تغیر انہی مقدار میں تغیر کے ساتھ اس والوں میں بدلنے پر
مح (لا و د و لو و مو) = ۱۰ اور مح (لا و د و لو و مو) =

ہم فرض کرتے ہیں کہ اصلی کلی د اور لا کی حدود غائی معلوم کے درمیان کی گئی ہے جب کلی لحاظ
کے اول لیتے ہیں تو د کی حدود غائی جملے لاکے ہو سکتی ہیں البتہ جب کلی لحاظ د کے
لیتے ہیں تو لا کو مقدار مستقل مقرر کرتے ہیں

اول ہم کلی کو لحاظ د کے اوس کلی میں بدلتی ہیں جو لحاظ مو کے لی جا اور یہہ بالظاہر
بہت آسان معلوم ہونی ہے (۱) کی مساواتوں میں کو کو ساقط کر کے د کو جملہ لا اور لو کا
اور یہہ کہو کہ

$$د = مح (لا و مو) \dots \dots (۲)$$

اسے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$د = مح (لا و مو) ز مو$$

اسمیں مح (لا و مو) سے مراد سرسری مح (لا و مو) کا لحاظ مو کے ہے
اب مع بہ ز مو میں د اور ز کی قیمتیں مندرجہ کرو تو ہم کو مع مح (لا و مو) ز مو
حاصل ہوگا اور اس میں مع وہ ہے جو مع میں د کے قیمت کے رکھتی سے حاصل ہوگا
اسے معلوم ہوا کہ کلی مشاہد یہہ ہو جائیگی کہ

$$مع مع مح (لا و مو) ز لا ز مو$$

پس ہم نے، کو خارج کر دیا اور اس کے جگہ کو کو قائم کر دیا اور جو کہ، کی قیمتیں حد بنانی والی
 جنکے درمیان ہم کو دراصل کلی یعنی ہے معلوم ہیں تو ہم (۲) سے مو کی قیمتیں حد بنانی والی
 جنکے درمیان ہم کو کلی یعنی چاہی معلوم ہو سکتی ہیں اس بات کا خیال ہے کہ (۲) سے جو کہ
 دیتا کرنے میں لاکو مقدار منتقل خیال کیا ہے اور یہ ہم سوا سٹے کرتے ہیں کہ ابھی ہم لکھ رہے ہیں
 کہ جب ہم صورت بیان یہ مفروض کی کلی بلحاظ کے یعنی ہیں تو ہم لاکو مقدار منتقل خیال کرنے میں
 اب سے سرآمد یہ ہے کہ ترتیب دیر کی کلی یعنی کی بلحاظ لا اور مو کے تبدیل کرن یعنی کلی
 بلحاظ لا کے اول لین یہ مضمون وہی ہے جس کا امتحان ابھی ہو چکا ہے کہ فقط اتنی بات کرنی چاہی
 کہ جدید حدود دفاعی کا فیصلہ کرنا لازم ہے پس جب بہ فرض کر لیں کہ یہ بات بھی فیصل
 ہو گئی تو اصل صورت بیان یہ بدل کر یہ ہو جائیگی کہ

مع مع مس صح (لاو مو) زمو زلا

اب باقی یہ رہا کہ اس صورت بیان یہ سے لاکو خارج کریں اور اس کے جگہ کو کو قائم کریں تو
 اسکے لئے بعینہ عمل موافق سابق کے کریں (۱) کے مساواتوں سے کو کو سا فط کریں اور
 لاکو جملہ مواور لو کا بنائیں اور یہ کہیں کہ

لا = صر (موو لو) . . . (۳)

تو اسے یہ حاصل ہو گا کہ

زلا = صر (موو لو) زلو

اس میں صر (موو لو) سے سر جزوی (موو لو) کا بلحاظ لو کے مراد سے
 پس لا اور زلا کی جگہ او کی قیمتیں مندرج کرو تو کلی ثناء یہ ہو جائیگی کہ

مع مع مہ صح (لاو مو) صر (موو لو) زمو زلو

اس میں مہ وہ ہے جو ہم میں لاکو جگہ او کی قیمت کے مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے
 پس اب کلی ثناء میں فقط لواور مو ہیں کیونکہ لا جو صح (لاو مو) میں نظر نہائی او کی جگہ ہم

تفسیر میں قیاد تیرہ ہوا

۱۶۴

صعاف ظنی میں کہ ایک قیمت اتنی ہر (۱) اور (۲) کی گنی سبب ملو و برین چونکہ جدو دنا
 ہم ش کرنے میں کہ ایک قیمت اتنی ہر (۱) اور (۲) کی گنی سبب ملو و برین چونکہ جدو دنا
 ہیکہ و میان کلی بلانہ لاکہ کی گنی ہے اور کا فیصلہ کر گیا ہے ہلکے ہاس یا تاکہ جاننے کی گنی
 بلحاظ لو کہ جن حدو دنا کی گنی و میان کی گنی ہے وہ معلوم میں
 پس ہم نے سوال کا حل حاصل کیا ہے جس تو بیان کر دیا اب غلات میں بیان کر دیا
 صحیح (لا و مو) اور ہر (مو) کے تحسین نہ لے بل سے ہونی ہے

ہم دیکھتے ہیں کہ صحیح (لا و مو) یعنی نیچو معلوم (۱) کی مساواتن سے اس طرح معلوم ہو گیا
 کو ساقط کرنے میں اور کو مقدار منتقل قرار دیتے ہیں اور ہر محل بعینہ اس عمل کی ہر

کہ (۱) سے

$$\frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}} + \frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}} + \frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}} = \frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}} + \frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}} + \frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}} = \frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}}$$

$$\frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}} - \frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}} = \frac{\text{زنجی}}{\text{زمو}}$$

اور یہ ہم سادہ سی لہ صحیح (لا و مو) کا ہے اور فرض کرو کہ بعد جزئیات لینے کے ہم

بجائے اور لو کہ ان کی قیمتیں اقام لا اور مو میں جو (۱) سے نکلتی ہیں

پھر ہر (مو) یعنی نیچو کو مساوات (۱) سے اس طرح دریافت کرو کہ کو ساقط کرو

اور کو مقدار منتقل سمجھو تو یہ عمل بعینہ اس عمل کے مساوی ہے کہ (۱) سے

$$\frac{\text{زنجی}}{\text{زلا}} + \frac{\text{زنجی}}{\text{زلا}} + \frac{\text{زنجی}}{\text{زلا}} = \frac{\text{زنجی}}{\text{زلا}} + \frac{\text{زنجی}}{\text{زلا}} + \frac{\text{زنجی}}{\text{زلا}} = \frac{\text{زنجی}}{\text{زلا}}$$

ان مساواتن میں سے زنجی کو ساقط کرو تو یہ دریافت ہو گا کہ

$$\frac{\text{زلا}}{\text{زلا}} = \frac{\text{زلا}}{\text{زلا}}$$

پس بہ سہ ماہی لہ صح (موو لو) کا ہے

پس صح (لاو مو) ہر (موو لو) =

پس اس قدر معلوم ہوا کہ تپہ بہہ

مع مع صہ زلا زو = مع مع صہ

اس میں بعد جزئیات اپنی کہ لا اور کی جگہ ادنیٰ زمینیں مو اور لو میں (۱) دریافت کر کے اور

لا اور کی قیمتیں مع میں ہی رکھنی چاہی

ایک خاص صورت بڑی عظیم نشان بہہ کہ لا اور صاف جملے لو اور سو کے ہوں تو (۱)

کی سہ اتوں کی بہ صورت ہوگی کہ

لا - ح (لو مو) = ۰ اور - ح م (لو مو) = ۰ (۵)

بہان $\frac{زلا}{زلا} = ۱$ اور $\frac{زلا}{زلا} = ۱$ اور $\frac{زلا}{زلا} = ۱$ اور $\frac{زلا}{زلا} = ۱$

اور کلی بہت بدلی ہوئی بہہ ہو جائیگی کہ

مع مع صہ $\left(\frac{زلا}{زلا} - \frac{زلا}{زلا} - \frac{زلا}{زلا} \right)$ زموزلو

اس کے اندر مع میں لا اور کی قیمتیں (۵) سے دریافت کر کے مندرج کرد

پس ہم بہہ لکھ سکتے ہیں

مع مع صہ زلا زو = مع مع صہ $\left(\frac{زلا}{زلا} - \frac{زلا}{زلا} - \frac{زلا}{زلا} \right)$ زموزلو (۶)

یہ فرض کرو کہ لو اور صاف جملے لا اور کے ہیں تو (۱) کی واثق اس صورت کی ہوگی کہ

لو - ح (لاو) = ۰ اور مو - ح م (لاو) = ۰ (۷)

اسے ہم کو بہہ حاصل ہونا ہے کہ

مع مع صہ زلا زو = مع مع صہ

اس میں لا اور کی قیمتیں جو (۷) سے حاصل ہوں درج کرو تو بہہ حاصل ہوگا کہ

مع مع صہ زلا زو = مع مع صہ $\left(\frac{زلا}{زلا} - \frac{زلا}{زلا} - \frac{زلا}{زلا} \right)$ زموزلو (۸)

صورقانونیہ (۴) اور (۶) اور (۸) کی اکثر معلوم ہوتی ہیں اور بین ایک بیان حل سوال کا اور صورقانون میں موجود ہے جنہیں حدود غائی کلی جدید کی ظاہر معلوم ہوتی ہیں لیکن بعض مثالوں میں طرف جدید کی حدود غائی کی تشخیص کرنے میں بعض اوقات بڑی مشکل آن پڑتی ہے اسلئے بجای ان صورقانونیہ کے عمل او سطح بعینہ کرو سطح کہ نظریات میں بیان ہوا کہ ایک پہلے مقدار متغیر کو ایک قدر میں ساقط کرو تا کہ صحیح نتیجہ حاصل ہو اور اوس پر ہر دسا اور اعتماد ہی ہو

(۲۴۰) یہ ایک مثال ہے کہ

طبع صابغ مہ زلا زو کی بہت بدلتی سطو ہے اور یہ معلوم ہے کہ

$$د + لا = لو اور د = لو مو$$

معلوم مساواتوں سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ لا = لو (۱- مو) اور د = لو مو

پس $\frac{لا}{لو} = ۱ - مو$ اور $\frac{د}{لو} = مو$ اور $\frac{لا}{د} = \frac{۱-مو}{مو}$

اس واسطے $\frac{لا}{د} = \frac{۱-مو}{مو}$ اور $لا = د (۱-مو) + لو مو = لو$

اسے معلوم ہوا کہ دفعہ ۲۳۹ کی مساوات (۶) میں ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

طبع صابغ مہ زلا زو = مع مع مہ لوز موز لو

ہم نے گہیات کی جو لحاظ لو اور مو کے لین ہیں اور میں حدود غائی نہیں تشخیص کیں اسلئے

جو نتیجہ نکالا ہے وہ کسی کام کا نہیں ہے اسلئے ہم اس مثال کو اوں مراتب کے موافق حل کرتے ہیں

جو نظریات میں بیان کیں ہیں

معلوم مساواتوں سے جنہیں پہلے اور نئی مقدار متغیر مربوط ہیں لو کو ساقط کرو تا کہ ہم صحیح

$$د = لا + مو اس واسطے \frac{لا}{د} = \frac{۱-مو}{مو}$$

حدود غائی د = ۰ اور د = ص کے مطابق مو = ۰ اور مو = ص $\frac{ص}{لا+ص}$ میں ہیں

طبع صابغ مہ زلا زو = طبع صابغ مہ لا (۱- مو) + لا زو مو

اب ہم کو ترتیب کلی کی

طبع ص+لا مع مہ لا (۱-مو) ۲ بین بدلی ہے

یہ سوال دفعہ ۲۳۵ میں حل ہو چکا اسے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

طبع ص+لا مع مہ زلا ز = طبع ص+لا مع مہ لا (۱-مو) ۲ زلا ز مو

= ص+لا مع مہ لا (۱-مو) ۲ زمو زلا + ص+لا مع مہ لا (۱-مو) ۲ زمو زلا

اب ہم کو لاکو سے بدلنا باقی رہا یہاں

لا = لو (۱-مو) $\frac{لا}{زلا} = ۱-مو$

بس ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{ط}{ص+لا} مع مہ لا (۱-مو) ۲ = \frac{ط}{ص+لا} مع مہ لوزمو زلا + \frac{ط}{ص+لا} مع مہ لوزمو زلا$

چونکہ لاکے حدود غائی اور ط کے مطابق لو کے حدود غائی اور $\frac{ط}{ص+لا}$ کے ہیں

اور لاکے حدود غائی اور $\frac{ط}{ص+لا}$ کے مطابق لو کی حدود غائی اور $\frac{ط}{ص+لا}$ کے ہیں

اگر ط = ص تو کلی ہست بدلی ہوئی یہ ہوگی کہ

$\frac{ط}{ص+لا} مع مہ لوزمو زلا + \frac{ط}{ص+لا} مع مہ لوزمو زلا = \frac{ط}{ص+لا} مع مہ لوزمو زلا$

اگر ط غیر متساوی ہو تو یہ دونوں میں اس ایک صورت بیانہ میں ترکیب با سکتی ہیں کہ

امع ص مع مہ لوزمو زلا

(۲۴۱) دوسری مثال

ص+لا مع مہ زلا ز کی ہست بدلو اور معلوم ہے کہ

$۱+لا = لو اور ۱ = لوزمو$

موافق سابق کے کل عمل کرو تو ہم کو یہ حاصل ہو سکتا ہے

$۱ = \frac{لا}{لوزمو} اور \frac{لا}{لوزمو} = \frac{لا}{لا (۱-مو)}$

جب کہ $۱ = لوزمو$ تو یہ حاصل ہوتا ہے مو = اور جب کہ $لا = لوزمو$ تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

مو = $\frac{لا}{لوزمو}$ پس کلی ہست بدل کر یہ ہوگی کہ

سے معلوم ہوتا ہے (دفعہ ۱۷۰)

مطلوب یہ ہے کہ اسکی ہست بلحاظ براور سر کے تبدیل کریں اور یہ معلوم ہے کہ
 $\text{سے} = \text{لق جم براور لا} = \text{لق جب برجم سراور} = \text{لق جب برجب سر}$
 سطح کے مساوات معلوم سے ارقام لا اور بین معلوم ہے اسے معلوم ہوا کہ
 اندراج قیمت سے ایکساوات حاصل ہوئی جسے لقا ارقام براور سر بین معلوم ہوتے ہیں
 اول ہم تبدیل ہست زلا زو کے واسطے دریافت کرتے ہیں

$$\frac{\text{زلا}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلی}}{\text{زبر}} \text{ جب برجم سر} + \text{لق جم برجم سر}$$

$$\frac{\text{زلا}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلی}}{\text{زبر}} \text{ جب برجم سر} - \text{لق جب برجب سر}$$

$$\frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلی}}{\text{زبر}} \text{ جب برجب سر} + \text{لق جم برجب سر}$$

$$\frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلی}}{\text{زبر}} \text{ جب برجب سر} - \text{لق جب برجم سر}$$

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{\text{زلا}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلا}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زے}}{\text{زبر}}$ لقا جب بر (لق جم بر + $\frac{\text{زلی}}{\text{زبر}}$ جب بر)
 پس زلا زو کی جگہ یہ رکھیں گے کہ

$$\text{لق جب بر (لق جم بر} + \frac{\text{زلی}}{\text{زبر}} \text{ جب بر) زبر زبر}$$

اب پہر دوبارہ ہست بدلتی ہیں

$$\left[1 + \left(\frac{\text{زے}}{\text{زلا}} \right) + \left(\frac{\text{زے}}{\text{زے}} \right) \right]$$

$$\text{ہم کو یہ حاصل ہے کہ } \frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زے}}{\text{زلا}} + \frac{\text{زلا}}{\text{زبر}} + \frac{\text{زے}}{\text{زے}} \frac{\text{زے}}{\text{زبر}}$$

$$\frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زے}}{\text{زلا}} + \frac{\text{زلا}}{\text{زبر}} + \frac{\text{زے}}{\text{زے}} \frac{\text{زے}}{\text{زبر}}$$

$$\text{اور نیز } \frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلی}}{\text{زبر}} \text{ جم بر} - \text{لق جب بر}$$

$$\frac{\text{زے}}{\text{زبر}} = \frac{\text{زلی}}{\text{زبر}} \text{ جم بر}$$

پس $\frac{\text{زے}}{\text{زلا}}$ ایک کسر ہے جسکا شمار کنندہ

$$\frac{\text{زے}}{\text{زبر}} - \frac{\text{زے}}{\text{زے}} \frac{\text{زے}}{\text{زبر}} \text{ ہے}$$

یعنی (زنی) جم بر - (لق جب بر) (زنی) جب بر جب سر + (لق جب بر جم سر)

- (زنی) جم بر (زنی) جب بر جب سر + (لق جب بر جم سر)

یعنی

- (لق جب سر زنی) + (لق جب بر جم بر جم سر زنی) - (لق جب زجم سر

اور سب نما

زلا زلا - زلا زلا زلا زلا

ہے اور اسکی مثبت پہلے دریافت کی تھی نہیں
 (لق جب بر جم بر جم سر زنی) - (لق جب سر زنی) - (لق جب زجم سر

اسطرح (لق جم سر زنی) + (لق جب بر جم بر جب سر زنی) - (لق جب زجم سر
 (لق جب بر (لق جم بر + جب بر زنی)

اسواٹے
 ۱ + (زلا) + (زلا) = (لق جب بر + لقا) (زنی) + (لق جب زجم بر (زنی)
 پس آخر کو ہٹ بدلی ہوئی کلی

مع ۱ [(لق جب بر + (زنی) + جب زجم بر (زنی)] (لق زجم زبر

(۲۴۵) اب کچھ دقت کلی مثلث کی ہٹ بدلنے میں نہیں ہوگی فرض کرو کہ

مرا ایک جملہ لا اور اورے کا ہے اور مع مع مع زلا زلا زلا کی ہٹ ایک کلی

مثلث میں بدلتی ہیں جس میں نئی مقدار میں تغیر لو اور مواد می ہوں اور یہ لا اور اورے

کے ساتھ میں ساوا توں میں ملو پڑ ہوں دفعہ ۲۳۴ کی تحقیقات ہم اس بات کو پہلے

سے خیال کر سکتے ہیں کہ نتیجہ کی امان صورت اوس حالت میں ہوگی کہ پہلے مقدار میں تغیر

نئے مقدار میں تغیر کی ارقام میں بغیر پیچیدگی کے بیان ہوئی ہوں پس فرض کرو

لا = ح (لو مو مو وی) اور = ح م (لو مو مو وی) دے = ح م (لو مو مو وی) (۱۰۰)

اول ہم کلی کو جو لمبا طے کے لی گئی ہے اسکو اوس کلی میں بدلتی ہیں جو لمبا طے کے لی گئی ہے کے کلی لینے کے اندر ہم لا اور د کو مقادیر مستقل خیال کرنے ہیں نظریات میں (۱) سے لا اور د کو ساقط کر کے کو جملہ لا اور د اور می کا بنا سکتے ہیں اور پھر ہم کو سر جزوی کے کا لمبا طے کے لا اور د کو مقادیر مستقل خیال کر کے لینا چاہئے مگر نتیجہ مطلوب ہم کو (۱) کی مساواتوں کے نتیجے میں جو جو کے جزئی لینے سے حاصل ہو جاتا ہے

$$\begin{aligned} \frac{زج}{دلو} &= \frac{زج}{زوی} + \frac{زج}{زمو} + \frac{زج}{زوی} \\ &= \frac{زج}{زوی} + \frac{زج}{زمو} + \frac{زج}{زوی} \\ &= \frac{زج}{زوی} + \frac{زج}{زمو} + \frac{زج}{زوی} \end{aligned}$$

زج اور زمو کو ساقط کرو تو یہ معلوم ہو گا کہ

$$\frac{زج}{زوی} = \frac{زج}{زوی} - \frac{زج}{زمو} - \frac{زج}{زوی}$$

$$\begin{aligned} \text{اسمیں } ن = \frac{زج}{زوی} &= \left(\frac{زج}{زوی} - \frac{زج}{زمو} - \frac{زج}{زوی} \right) + \left(\frac{زج}{زوی} - \frac{زج}{زمو} - \frac{زج}{زوی} \right) \\ &+ \left(\frac{زج}{زوی} - \frac{زج}{زمو} - \frac{زج}{زوی} \right) \end{aligned}$$

اسے معلوم ہوا کہ کلی بدل کر یہ ہوئی کہ

$$\text{منع مع مسا} \frac{زج}{دلو} - \frac{زج}{زمو} - \frac{زج}{زوی} = \text{زلا زوی}$$

اسمیں وہ ہے جو میں کے قیمت ارقام لا اور د اور می رکھنے سے ہو جاتا ہے اس کے حدود غائی معلوم سے می کی حدود غائی دریافت کرنی چاہی پھر ترتیب کلی اور می کے واسطے بدلتی چاہی اور پھر عمل موافق سابق کے دے کے خارج کرتے اور مو کے داخل کرنے کی لڑ کر نا چاہے مسئلہ میں یہ مناسب کہ عمل کے کرنے میں قدم بقدم جلیں تاکہ کلی کی حدود غائی معلوم ہو جائیں

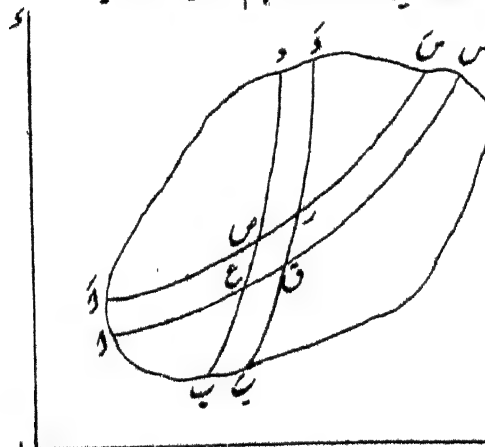
ہم نہایت سادگی سے صورت قانونیہ کو اس طرح استخراج کر سکتے ہیں کہ کلی لمبا طے کے کلی لمبا طے میں موافق بیان بالا کے بہت بدلتی ہیں اور پھر دو دفعہ ترتیب کلی کو تبدیل کیے

اور موازی کے ہیں

یہ ممکن ہے کہ (۲) مساواتیں ایسی ہوں کہ تبدلات ہست کی طریقہ میں کچھ قیود لگائیں مثلاً یہ کہ موازی کے

$$لا + د + ع = لو = لا + د - لو مو = اور د - لو مو =$$

ان مساواتوں سے ہم کے ارقام می اور لا اور مو میں نہیں بیان کر سکتے اسلئے ہم کو آغاز سے اور می کے تبادل سے نہیں کرنا چاہیے لیکن ہم سے اور لو کے تبادل سے بے اور کو کے تبادل سے آغاز کر سکتے ہیں یا آغاز سطح کہ لایا کو لو یا مو یا می سے تبدیل کریں (۲۴۶) طالب علموں کے سمجھنے کے واسطے یہ امر فائدہ مند ہوگا کہ ہم تبدیل ہست کی توضیح کو علم ہند کے موافق بیان کریں مٹی شفا سے ہم شروع کرتے ہیں



فرض کرو کہ مع مع مہ زلزلہ کلی شفا ہے اور وہ لا اور د کے کلی قیمتوں کے موافق جو ط لاب س د میں واقع ہوں لی گئی ہے اور فرض کرو کہ مقدار بر متغیر لا اور د نئی مقدار متغیر لو اور می کے ساتھ ان مساواتوں میں مربوط ہیں کہ

$$لا = ح (لو د مو) اور د = ح (لو مو) \dots (۱)$$

ان مساواتوں سے فرض کرو کہ موازی کے ارقام میں لا اور د دریافت ہوئی ہیں سو ان کو سطح لکھ سکتے ہیں کہ

$$لو = ح (لا د) اور مو = ح (لا د) \dots (۲)$$

اب لو کی کوئی مستقل قیمت لگاؤ تو اول مساوات (۲) کی ایک خط منحنی کو تعبیر کرنی لگتی ہے اور متوازن
مستقل قیمتیں لو کی لگانے سے ایک سلسلہ ایسے خطوط منحنی کا حاصل ہوگا جس فرض کرو کہ

اور C ق س ایسا خط منحنی ہو جس کا ہر نقطہ بر C (لاوی) کی ایک خاص مستقل قیمت لور رکھتا ہے
اور فرض کرو کہ C ص رس ایک خط منحنی ہے جس کے ہر نقطہ پر C (لاوی) کی خاص مستقل قیمت

لو + فر لور رکھتا ہے طے ہذا القیاس بع C ص د ایک خط منحنی جسکی ہر نقطہ پر C (لاوی)

ایک خاص مستقل قیمت مور رکھتا ہے اور ب C ر د خط منحنی ہی جسکی ہر نقطہ پر C (لاوی)

ایک خاص قیمت مستقل مو + فر مور رکھتا ہے اور اب فرض کرو کہ لاوی محدودین نقطہ C کے ہیں

اب C اور C اور C کے محدودین کو بیان کرتے ہیں

محدودین C کے C کی محدودین سے اس طرح دریافت ہوتے ہیں کہ مو کو مو +

فر مو سے بدلتی ہیں پس اسی معلوم ہوا کہ موافق (۱) کے وہ آخر کو جب فر مو غیر محدود

چھوٹا ہوگا یہہ ہونگے کہ

$$لا + \frac{فر}{لو} فر لا اور لا + \frac{فر}{لو} فر مو$$

طے ہذا القیاس ص کے محدودین C کے محدودین سے اس طرح دریافت ہوتے ہیں کہ لو کو

لو + فر لو سے بدل دو اسے معلوم ہوا کہ موافق (۱) کے وہ آخر کار

$$لا + \frac{فر}{لو} فر لو اور لا + \frac{فر}{لو} فر لو$$

محدودین C کے C کے محدودین سے اس طرح دریافت ہوتے ہیں کہ لو کو لو + فر لو سے اور

مو کو مو + فر مو سے تبدیل کریں اسے بموجب (۱) کے آخر کو وہ یہہ ہونگے کہ

$$لا + \frac{فر}{لو} فر لو + \frac{فر}{لو} فر مو اور لا + \frac{فر}{لو} فر لو + \frac{فر}{لو} فر مو$$

ان نتائج سے ثابت ہوتا ہے کہ C اور C اور C اور ص آخر کو ایک متوازی الاضلاع کے

کونوں کے نغٹوں پر واقع ہونے ہیں اور اس متوازی الاضلاع کا رقبہ تعبیر کسی غلطی کے سچا

رقبہ منحنی الاضلاع C ق ر ص کے صدغائی میں لے سکتی ہیں اور مثلث C ق ر

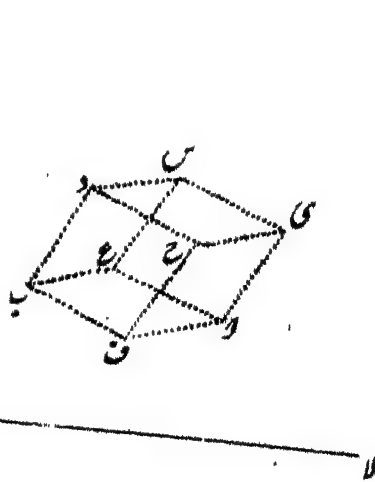
کے صورت بیانہ اوسکے کونوں کی محدبین کے اندر دفعہ اول علم ہندسہ بالجبر و حساب
اور رقبہ متوازی الاضلاع کا دو چند مثلث سے ہوتا ہے ہے معلوم ہوا کہ آخر کار رقبہ ع ق ر
کی صورت بیانہ یہ ہوگی کہ

$$\pm \left(\frac{زلا}{زمو} - \frac{زلا}{زمو} \right) \text{ فرلو فرمو}$$

پس اسے ظاہر ہے کہ مع مع مہ زلا زو کی جگہ

$$\pm \text{ مع مع مہ } \left(\frac{زلا}{زمو} - \frac{زلا}{زمو} \right) \text{ زلو زمو}$$

ر کہہ سکتے ہیں اشتباہ علامت کا اوسوقت رنح ہو جائیگا جسوقت کلی حدود فاضلی درست ہو جائیگی
ہست بدلی ہوئی کلی بین ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ کلی بلحاظ مو اول لئی گئی بین اور لو متقدار قتل
سمجھی گئی ہے اور اسکی یہ معنی ہیں کہ اجزاء ترکیبی مثل ع ق ر کے جسے ایک قطعہ مثل ا و اس س
کے بنتا ہے لئی گئی بین پس کلی بلحاظ لو کے یہ معنی ہیں کہ تمام ایسے قطعہ جیسا کہ ا و اس س ہے
اور جو احاطہ اب س و مین واقع بین لئی گئے ہیں
(۲۷۷) اب کلی مثلثہ کی هست بدلی کی توضیح علم ہندسہ میں کرتے ہیں



فرض کرو کہ مع مع مہ زلا زو سے کلی مثلثہ سے اور لا اورے کے تمام

قیمتوں کے موافق جو حدود غائی معینہ میں واقع ہوئی گئی ہی اور فرض کرو کہ مقادیر متغیر
 لاؤ دے ان سبھی مقادیر متغیر لو مو مو می کے ساتھ ان مساواتوں میں مربوط ہیں
 لا = ح (لو و مو می) اور ح = ح (لو و مو می) اور ح = ح (لو و مو می) ... (۱)
 ان مساواتوں سے فرض کرو کہ لو اور مو اور می کو ارقام لا اور د اور دے میں بیان کریں تو (۲)
 لو = ح (لاؤ دے) اور مو = ح (لاؤ دے) اور می = ح (لاؤ دے)
 اب لو کی کوئی مستقل قیمت لگانے سے ادل مساوات (۲) کی ایک سطح بیرونی کو تعبیر کرنی لگتی ہے
 اور متواتر مختلف مستقل قیمتیں لو کی لگانے سے ہم کو ایک سلسلہ سطح بیرونی کا حاصل ہوتا ہے
 فرض کرو کہ ایک سطح بیرونی ہو جسکا ہر نقطہ ح (لاؤ دے) قیمت مستقل ہو رکھتا ہے
 اور یہ بھی فرض کرو کہ ع اور ب اور د اور س چار نقطی اوس سطح بیرونی میں ہیں
 اور ایک سطح بیرونی ایسی ہی ہے کہ جسکا ہر نقطہ پر ح (لاؤ دے) ایک مستقل قیمت
 لو + فرلو رکھتا ہے اور اس سطح بیرونی میں چار نقطی آ و ت و ج و ح ہیں اور اس سطح
 فرض کرو کہ ع و آ و می و س اوس سطح بیرونی میں ہیں جسکے ہر نقطہ پر ح (لاؤ دے)
 مستقل قیمت ہو رکھتا ہے اور ب و د و ج و ت اوس سطح بیرونی پر ہیں جسکے
 ہر نقطہ پر ح (لاؤ دے) ایک مستقل قیمت مو + فرمو رکھتا ہے
 فرض کرو کہ ع اور آ اور ت اور ب اوس سطح بیرونی میں ہیں جسکے ہر نقطہ پر
 ح (لاؤ دے) مستقل قیمت می رکھتا ہے اور س و د و ج و ت اوس سطح بیرونی میں
 ہیں جسکے ہر نقطہ پر ح (لاؤ دے) ایک مستقل قیمت می + فرمی رکھتا ہے
 فرض کرو کہ لاؤ دے و تے محدودین نقطہ ع کے ہیں اب ہم محدودین اور نقاط کے بیان کرتے ہیں
 محدودین نقطہ ل کے ع کے محدودین سے اس طرح دریافت ہوتی ہیں کہ لو کو لو + فرلو سے
 بدل دیں اسی معلوم ہوا کہ موافق (۱) کے وہاں کار حیب فرلو غیر محدود دھپوٹا ہو
 لا + $\frac{فرلو}{نزل}$ اور دے + $\frac{فرلو}{نزل}$ اور س + $\frac{فرلو}{نزل}$ اور ت + $\frac{فرلو}{نزل}$ اور ب + $\frac{فرلو}{نزل}$ اور ج + $\frac{فرلو}{نزل}$ اور ح + $\frac{فرلو}{نزل}$

(۲۴۸) کلی مثلاً اور مثلث کا بہت بدلتی کا مسئلہ لکھا گیا اس شخصیات میں اصل منشاء ہمارا یہ ہے ہٹا کہ ہم بتلا دین کہ پہلی مفادیر متغیر کس طرح خارج ہو جاتے ہیں اور ان کے جگہ نئی مفادیر متغیر کو نکر داخل ہو جاتی ہیں طالب علموں کو ہدایت کرنے ہیں کہ وہ خاص اس باب پر متوجہ ہوں کیونکہ اس کے سبب مسئلہ صفا اور عیاں ہو جاتا ہے اور حدود وغائی بہت بدلتی ہوئی کلی کی پسانی تحقیق ہو سکتی ہیں توضیحات ہندسیہ کا بوجہ طالب علم کے بسیر پر نہیں رکھتی کہ خواہ مخواہ وہ اس پر توجہ کرے اسلامی کہ ان کی تشریح کے واسطے کچھ لکھنا چاہئے جب وہ قابل اسکے ہوتی ہیں کہ ان کے اثبات کو مستحکم سمجھیں

(۲۴۹) اب اس مضمون کو ختم کرنے سے پیشتر ہم وہ ترکیب لکھتے ہیں جو پہلے پہلے مسئلہ کے حل کرنے میں کام آتی تھی ہم نے جو اس ترکیب وقت کے ساتھ نہیں بیان تو کچھ نوٹ کیا کہ اسے حدود وغائی جدید کی تشخیص کرنے میں کچھ اعانت نہیں ہوتی اور کچھ یہ سب تھا کہ وہ صفا نہیں تنگ و تاریک ہے اس تنگ تاریک ہونی کی شکایت اور مصنفین پہلے ہی کرنا شروع کر دیں فرض کرو کہ مع مع مہ زلا زو کی بہت بدلتی ایسی کلی میں ہے جو بلحاظ دونوں مفادیر متغیر زو اور مو کے ایچا اور یہ دونوں نئی مفادیر متغیر پہلے مفادیر متغیر کے معلوم جملے ہیں فرض کرو کہ مفادیر متغیر میں ایسی تبدلات کئی کئی ہیں جن میں غیر قنای چھوٹے اجزائی گئی ہیں تو

$$زلا = \frac{زلا}{زلا} زلو + \frac{زلا}{زلا} زمو \dots (۱)$$

$$زو = \frac{زو}{زو} زلو + \frac{زو}{زو} زمو \dots (۲)$$

اب اصل صورت بیانہ مہ زلا زو میں زلا کے بنانے میں زو کو مقدار متقل فرض کرنے میں

$$زو = ۱ \dots (۲) \text{ کے بہ صورت ہو جائیگی کہ}$$

$$۰ = \frac{زلا}{زلا} زلو + \frac{زلا}{زلا} زمو \dots (۳)$$

اسے زمو کو دریافت کرو اور اس کی قیمت کو (۱) میں درج کرو تو یہ حاصل ہو گا کہ

$$زلا = \frac{زلا}{زلا} زلو - \frac{زلا}{زلا} زمو \dots (۴)$$

اب پہر مہ زلا ز زمین زد کے بنانے کے واسطے لا کو مستقل فرض کرتے ہیں یعنی زلا =
اسے معلوم ہوا کہ موافق (۴) کے ہم کو زلو = ۰ کے فرض کرنا چاہتے ہیں (۲) سے
ز = $\frac{ز}{زمو} = \frac{ز}{زمو}$ (۵)

(۴) اور (۵) سے

$$زلا ز = \left(\frac{زلا}{زمو} - \frac{ز}{زمو} \right) زلو$$

اور مع مع مہ زلا ز کی بہر صورت ہو جائیگے کہ

$$مع مع مہ = \left(\frac{زلا}{زمو} - \frac{ز}{زمو} \right) زلو$$

بلحاظ جدید حدود غائی کے ہم یہی کلام ہدایت کر سکتے ہیں کہ وہ اسی ہونی چاہی کہ
جسمین ہرک جز ترکیبی داخل ہو جو پہلی حدود غائی کے درمیان داخل تھا
(۲۵۰) علیٰ ہذا القیاس کلی مثلثہ

مع مع مہ زلا ز سے

کی کیفیت ہر او میں عمل تفصیل ذیل ہوتا ہے کہ فرض کروئے مفاد میر تقی میر لا اور ہواوری
زے کے بنانے میں فرض لا اور کی مفاد میر تقی میر خیال کرتے ہیں پس

$$زے = \frac{زے}{زلو} زلو + \frac{زے}{زمو} زمو + \frac{زے}{زمی} زمی$$

$$= \frac{زلا}{زلو} زلو + \frac{زلا}{زمو} زمو + \frac{زلا}{زمی} زمی$$

$$= \frac{ز}{زلو} زلو + \frac{ز}{زمو} زمو + \frac{ز}{زمی} زمی$$

$$پس زے = \frac{ن زمی}{ن زمی} = \frac{زلا}{زلو} - \frac{ز}{زمو} \quad (۱)$$

اس میں ن کی وہی قیمت ہے جو دفعہ ۲۴ میں تھی

اب زد کے بنانے میں لا اور سے کو مفاد میر تقی میر خیال کرتے ہیں تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$زد = \frac{زد}{زلو} زلو + \frac{زد}{زمو} زمو$$

$$= \frac{زلا}{زلو} زلو + \frac{زلا}{زمو} زمو$$

خفت کلی میں

تغیر مقام و پرستخیز کا

تغییر می یابد

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 = \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right)$$

(۲)

(۱۱) اگر سہ لا = دے اور صدے = سے لا اور لکے = لاؤ تو ثابت کرو کہ

مع مع مع ج (سر و صدے) زمرہ زمرہ زمرہ = مع مع مع ج (لکے و لکے و لکے) زلازل زمرہ

(۱۲) مع مع مع مع مع زلازل زلازل زلازل کی بہت بدلوں جہین بن دبر و سر اور دھڑا اور

لا = لقی جب برجم سر اور لا = لقی جم برجم سر

لا = لقی جب برجم سر اور لا = لقی جم برجم سر

حاصل مع مع مع مع لقی جب برجم برز لقی زمرہ زمرہ زمرہ

(۱۳) خطوط متغی ج (لا دے) = لو اور مع (لا دے) = لو اور خطوط متغی ج (لا دے) = لو اور خطوط متغی ج (لا دے) = لو اور

مستقلہ لو اور کو نہایت ہی چھوٹی زیادتی دینے سے حاصل ہوں ان خطوط متغی کے در

جو رقبہ واقع ہوا و سکودریافت کرو

قریب البیضوی اور اسکے عرض مستقیم کے اطراف سے جو ماس نکالی جائیں انکو درمیان جو رقبہ

واقع ہوا و سکودریافت کے سلسلہ سے اور خطوط مستقیم کے سلسلہ سے تقسیم کر کے دریافت کرو

سلسلہ قریب البیضوی اب ہو کہ ہر یک قریب البیضوی ماسوں کو مس کرے اور

اور سلسلہ خطوط مستقیم ماسوں کے نقطہ تقاطع سے کہنیا جائے

(۱۴) کلی مثلث مع مع مع ج (لا دے) زلازل زمرہ کی بہت ہی کلی میں تبدیل کرو

کہ اس میں متغیر متغیر بے تعلق لقی و دے ہوں اور یہ معلوم ہو کہ مع (لا دے و دے و دے) =

اور اوپر کی کلی میں لا اور دے اور لقی اور بر اور سر میں تبدیل کرو اور یہ معلوم ہے کہ

مع (لا دے و دے و دے) = اور مع (دے و دے و دے) = اور مع (دے و دے و دے) =

زمرہ زمرہ زمرہ

زمرہ زمرہ زمرہ

زمرہ زمرہ زمرہ

زمرہ زمرہ زمرہ

حاصل - مع مع مع ج (لانی دبر و سر) زمرہ زمرہ زمرہ

(۱۵) کلی مثلث مع مع مع ج (لا دے) + (لا دے) + (لا دے) کے

$$\frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

سے تعبیر ہو سکتی ہے کہ ہر قدر بڑھتا چلا اور ب اس مساوات

$$1 - \frac{2}{(1-a)} = \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

$$1 - \frac{2}{(1-a)} = \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

$$1 - \frac{2}{(1-a)} = \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

$$1 - \frac{2}{(1-a)} = \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

اور یہ ظاہر ہے کہ دوسرے کلی حدود معینہ کے درمیان صفر ہے اسلئے کہ تعداد نامتناہی حصہ برابر مثبت حصہ کے ہے پس ۲ ب کہ کلی کے اوس حصہ کو بغیر کرنا ہے جو موافق زوج خیالی جذروں کے لیا جاوے

پس اگر $1 - \frac{2}{(1-a)}$ کو ۲ ن درجہ کا فرض کریں اور ب ۱ اور ب ۲ ۰۰ ب ن

ن ارقام ہوں چکا نمونہ ب قرار دیا گیا ہے تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$1 - \frac{2}{(1-a)} = \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

(۲۵۴) دفعہ گذشتہ کی بہ ایک مثال ہے کہ

$$1 - \frac{2}{(1-a)} = \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

لین اس میں م اور ن مثبت صحیح ہیں اور م چوٹیاں سے ہے یہاں

$$1 - \frac{2}{(1-a)} = \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

اور یہ معلوم ہے کہ قیمتیں ۱ + صہ $\frac{2}{(1-a)}$ کی اس صورت بیانہ سے حاصل ہو سکتی ہیں کہ

$$1 - \frac{2}{(1-a)} = \frac{2}{(1-a)} + \frac{2}{(1-a)} + \dots$$

اس میں ن کی متواتر قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹، ۵۴۰، ۵۴۱، ۵۴۲، ۵۴۳، ۵۴۴، ۵۴۵، ۵۴۶، ۵۴۷، ۵۴۸، ۵۴۹، ۵۵۰، ۵۵۱، ۵۵۲، ۵۵۳، ۵۵۴، ۵۵۵، ۵۵۶، ۵۵۷، ۵۵۸، ۵۵۹، ۵۶۰، ۵۶۱، ۵۶۲، ۵۶۳، ۵۶۴، ۵۶۵، ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، ۵۶۹، ۵۷۰، ۵۷۱، ۵۷۲، ۵۷۳، ۵۷۴، ۵۷۵، ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۷۸، ۵۷۹، ۵۸۰، ۵۸۱، ۵۸۲، ۵۸۳، ۵۸۴، ۵۸۵، ۵۸۶، ۵۸۷، ۵۸۸، ۵۸۹، ۵۹۰، ۵۹۱، ۵۹۲، ۵۹۳، ۵۹۴، ۵۹۵، ۵۹۶، ۵۹۷، ۵۹۸، ۵۹۹، ۶۰۰، ۶۰۱، ۶۰۲، ۶۰۳، ۶۰۴، ۶۰۵، ۶۰۶، ۶۰۷، ۶۰۸، ۶۰۹، ۶۱۰، ۶۱۱، ۶۱۲، ۶۱۳، ۶۱۴، ۶۱۵، ۶۱۶، ۶۱۷، ۶۱۸، ۶۱۹، ۶۲۰، ۶۲۱، ۶۲۲، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶، ۶۲۷، ۶۲۸، ۶۲۹، ۶۳۰، ۶۳۱، ۶۳۲، ۶۳۳، ۶۳۴، ۶۳۵، ۶۳۶، ۶۳۷، ۶۳۸، ۶۳۹، ۶۴۰، ۶۴۱، ۶۴۲، ۶۴۳، ۶۴۴، ۶۴۵، ۶۴۶، ۶۴۷، ۶۴۸، ۶۴۹، ۶۵۰، ۶۵۱، ۶۵۲، ۶۵۳، ۶۵۴، ۶۵۵، ۶۵۶، ۶۵۷، ۶۵۸، ۶۵۹، ۶۶۰، ۶۶۱، ۶۶۲، ۶۶۳، ۶۶۴، ۶۶۵، ۶۶۶، ۶۶۷، ۶۶۸، ۶۶۹، ۶۷۰، ۶۷۱، ۶۷۲، ۶۷۳، ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶، ۶۷۷، ۶۷۸، ۶۷۹، ۶۸۰، ۶۸۱، ۶۸۲، ۶۸۳، ۶۸۴، ۶۸۵، ۶۸۶، ۶۸۷، ۶۸۸، ۶۸۹، ۶۹۰، ۶۹۱، ۶۹۲، ۶۹۳، ۶۹۴، ۶۹۵، ۶۹۶، ۶۹۷، ۶۹۸، ۶۹۹، ۷۰۰، ۷۰۱، ۷۰۲، ۷۰۳، ۷۰۴، ۷۰۵، ۷۰۶، ۷۰۷، ۷۰۸، ۷۰۹، ۷۱۰، ۷۱۱، ۷۱۲، ۷۱۳، ۷۱۴، ۷۱۵، ۷۱۶، ۷۱۷، ۷۱۸، ۷۱۹، ۷۲۰، ۷۲۱، ۷۲۲، ۷۲۳، ۷۲۴، ۷۲۵، ۷۲۶، ۷۲۷، ۷۲۸، ۷۲۹، ۷۳۰، ۷۳۱، ۷۳۲، ۷۳۳، ۷۳۴، ۷۳۵، ۷۳۶، ۷۳۷، ۷۳۸، ۷۳۹، ۷۴۰، ۷۴۱، ۷۴۲، ۷۴۳، ۷۴۴، ۷۴۵، ۷۴۶، ۷۴۷، ۷۴۸، ۷۴۹، ۷۵۰، ۷۵۱، ۷۵۲، ۷۵۳، ۷۵۴، ۷۵۵، ۷۵۶، ۷۵۷، ۷۵۸، ۷۵۹، ۷۶۰، ۷۶۱، ۷۶۲، ۷۶۳، ۷۶۴، ۷۶۵، ۷۶۶، ۷۶۷، ۷۶۸، ۷۶۹، ۷۷۰، ۷۷۱، ۷۷۲، ۷۷۳، ۷۷۴، ۷۷۵، ۷۷۶، ۷۷۷، ۷۷۸، ۷۷۹، ۷۸۰، ۷۸۱، ۷۸۲، ۷۸۳، ۷۸۴، ۷۸۵، ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۸۸، ۷۸۹، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۲، ۷۹۳، ۷۹۴، ۷۹۵، ۷۹۶، ۷۹۷، ۷۹۸، ۷۹۹، ۸۰۰، ۸۰۱، ۸۰۲، ۸۰۳، ۸۰۴، ۸۰۵، ۸۰۶، ۸۰۷، ۸۰۸، ۸۰۹، ۸۱۰، ۸۱۱، ۸۱۲، ۸۱۳، ۸۱۴، ۸۱۵، ۸۱۶، ۸۱۷، ۸۱۸، ۸۱۹، ۸۲۰، ۸۲۱، ۸۲۲، ۸۲۳، ۸۲۴، ۸۲۵، ۸۲۶، ۸۲۷، ۸۲۸، ۸۲۹، ۸۳۰، ۸۳۱، ۸۳۲، ۸۳۳، ۸۳۴، ۸۳۵، ۸۳۶، ۸۳۷، ۸۳۸، ۸۳۹، ۸۴۰، ۸۴۱، ۸۴۲، ۸۴۳، ۸۴۴، ۸۴۵، ۸۴۶، ۸۴۷، ۸۴۸، ۸۴۹، ۸۵۰، ۸۵۱، ۸۵۲، ۸۵۳، ۸۵۴، ۸۵۵، ۸۵۶، ۸۵۷، ۸۵۸، ۸۵۹، ۸۶۰، ۸۶۱، ۸۶۲، ۸۶۳، ۸۶۴، ۸۶۵، ۸۶۶، ۸۶۷، ۸۶۸، ۸۶۹، ۸۷۰، ۸۷۱، ۸۷۲، ۸۷۳، ۸۷۴، ۸۷۵، ۸۷۶، ۸۷۷، ۸۷۸، ۸۷۹، ۸۸۰، ۸۸۱، ۸۸۲، ۸۸۳، ۸۸۴، ۸۸۵، ۸۸۶، ۸۸۷، ۸۸۸، ۸۸۹، ۸۹۰، ۸۹۱، ۸۹۲، ۸۹۳، ۸۹۴، ۸۹۵، ۸۹۶، ۸۹۷، ۸۹۸، ۸۹۹، ۹۰۰، ۹۰۱، ۹۰۲، ۹۰۳، ۹۰۴، ۹۰۵، ۹۰۶، ۹۰۷، ۹۰۸، ۹۰۹، ۹۱۰، ۹۱۱، ۹۱۲، ۹۱۳، ۹۱۴، ۹۱۵، ۹۱۶، ۹۱۷، ۹۱۸، ۹۱۹، ۹۲۰، ۹۲۱، ۹۲۲، ۹۲۳، ۹۲۴، ۹۲۵، ۹۲۶، ۹۲۷، ۹۲۸، ۹۲۹، ۹۳۰، ۹۳۱، ۹۳۲، ۹۳۳، ۹۳۴، ۹۳۵، ۹۳۶، ۹۳۷، ۹۳۸، ۹۳۹، ۹۴۰، ۹۴۱، ۹۴۲، ۹۴۳، ۹۴۴، ۹۴۵، ۹۴۶، ۹۴۷، ۹۴۸، ۹۴۹، ۹۵۰، ۹۵۱، ۹۵۲، ۹۵۳، ۹۵۴، ۹۵۵، ۹۵۶، ۹۵۷، ۹۵۸، ۹۵۹، ۹۶۰، ۹۶۱، ۹۶۲، ۹۶۳، ۹۶۴، ۹۶۵، ۹۶۶، ۹۶۷، ۹۶۸، ۹۶۹، ۹۷۰، ۹۷۱، ۹۷۲، ۹۷۳، ۹۷۴، ۹۷۵، ۹۷۶، ۹۷۷، ۹۷۸، ۹۷۹، ۹۸۰، ۹۸۱، ۹۸۲، ۹۸۳، ۹۸۴، ۹۸۵، ۹۸۶، ۹۸۷، ۹۸۸، ۹۸۹، ۹۹۰، ۹۹۱، ۹۹۲، ۹۹۳، ۹۹۴، ۹۹۵، ۹۹۶، ۹۹۷، ۹۹۸، ۹۹۹، ۱۰۰۰، ۱۰۰۱، ۱۰۰۲، ۱۰۰۳، ۱۰۰۴، ۱۰۰۵، ۱۰۰۶، ۱۰۰۷، ۱۰۰۸، ۱۰۰۹، ۱۰۱۰، ۱۰۱۱، ۱۰۱۲، ۱۰۱۳، ۱۰۱۴، ۱۰۱۵، ۱۰۱۶، ۱۰۱۷، ۱۰۱۸، ۱۰۱۹، ۱۰۲۰، ۱۰۲۱، ۱۰۲۲، ۱۰۲۳، ۱۰۲۴، ۱۰۲۵، ۱۰۲۶، ۱۰۲۷، ۱۰۲۸، ۱۰۲۹، ۱۰۳۰، ۱۰۳۱، ۱۰۳۲، ۱۰۳۳، ۱۰۳۴، ۱۰۳۵، ۱۰۳۶، ۱۰۳۷، ۱۰۳۸، ۱۰۳۹، ۱۰۴۰، ۱۰۴۱، ۱۰۴۲، ۱۰۴۳، ۱۰۴۴، ۱۰۴۵، ۱۰۴۶، ۱۰۴۷، ۱۰۴۸، ۱۰۴۹، ۱۰۵۰، ۱۰۵۱، ۱۰۵۲، ۱۰۵۳، ۱۰۵۴، ۱۰۵۵، ۱۰۵۶، ۱۰۵۷، ۱۰۵۸، ۱۰۵۹، ۱۰۶۰، ۱۰۶۱، ۱۰۶۲، ۱۰۶۳، ۱۰۶۴، ۱۰۶۵، ۱۰۶۶، ۱۰۶۷، ۱۰۶۸، ۱۰۶۹، ۱۰۷۰، ۱۰۷۱، ۱۰۷۲، ۱۰۷۳، ۱۰۷۴، ۱۰۷۵، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۸، ۱۰۷۹، ۱۰۸۰، ۱۰۸۱، ۱۰۸۲، ۱۰۸۳، ۱۰۸۴، ۱۰۸۵، ۱۰۸۶، ۱۰۸۷، ۱۰۸۸، ۱۰۸۹، ۱۰۹۰، ۱۰۹۱، ۱۰۹۲، ۱۰۹۳، ۱۰۹۴، ۱۰۹۵، ۱۰۹۶، ۱۰۹۷، ۱۰۹۸، ۱۰۹۹، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱، ۱۱۰۲، ۱۱۰۳، ۱۱۰۴، ۱۱۰۵، ۱۱۰۶، ۱۱۰۷، ۱۱۰۸، ۱۱۰۹، ۱۱۱۰، ۱۱۱۱، ۱۱۱۲، ۱۱۱۳، ۱۱۱۴، ۱۱۱۵، ۱۱۱۶، ۱۱۱۷، ۱۱۱۸، ۱۱۱۹، ۱۱۲۰، ۱۱۲۱، ۱۱۲۲، ۱۱۲۳، ۱۱۲۴، ۱۱۲۵، ۱۱۲۶، ۱۱۲۷، ۱۱۲۸، ۱۱۲۹، ۱۱۳۰، ۱۱۳۱، ۱۱۳۲، ۱۱۳۳، ۱۱۳۴، ۱۱۳۵، ۱۱۳۶، ۱۱۳۷، ۱۱۳۸، ۱۱۳۹، ۱۱۴۰، ۱۱۴۱، ۱۱۴۲، ۱۱۴۳، ۱۱۴۴، ۱۱۴۵، ۱۱۴۶، ۱۱۴۷، ۱۱۴۸، ۱۱۴۹، ۱۱۵۰، ۱۱۵۱، ۱۱۵۲، ۱۱۵۳، ۱۱۵۴، ۱۱۵۵، ۱۱۵۶، ۱۱۵۷، ۱۱۵۸، ۱۱۵۹، ۱۱۶۰، ۱۱۶۱، ۱۱۶۲، ۱۱۶۳، ۱۱۶۴، ۱۱۶۵، ۱۱۶۶، ۱۱۶۷، ۱۱۶۸، ۱۱۶۹، ۱۱۷۰، ۱۱۷۱، ۱۱۷۲، ۱۱۷۳، ۱۱۷۴، ۱۱۷۵، ۱۱۷۶، ۱۱۷۷، ۱۱۷۸، ۱۱۷۹، ۱۱۸۰، ۱۱۸۱، ۱۱۸۲، ۱۱۸۳، ۱۱۸۴، ۱۱۸۵، ۱۱۸۶، ۱۱۸۷، ۱۱۸۸، ۱۱۸۹، ۱۱۹۰، ۱۱۹۱، ۱۱۹۲، ۱۱۹۳، ۱۱۹۴، ۱۱۹۵، ۱۱۹۶، ۱۱۹۷، ۱۱۹۸، ۱۱۹۹، ۱۲۰۰، ۱۲۰۱، ۱۲۰۲، ۱۲۰۳، ۱۲۰۴، ۱۲۰۵، ۱۲۰۶، ۱۲۰۷، ۱۲۰۸، ۱۲۰۹، ۱۲۱۰، ۱۲۱۱، ۱۲۱۲، ۱۲۱۳، ۱۲۱۴، ۱۲۱۵، ۱۲۱۶، ۱۲۱۷، ۱۲۱۸، ۱۲۱۹، ۱۲۲۰، ۱۲۲۱، ۱۲۲۲، ۱۲۲۳، ۱۲۲۴، ۱۲۲۵، ۱۲۲۶، ۱۲۲۷، ۱۲۲۸، ۱۲۲۹، ۱۲۳۰، ۱۲۳۱، ۱۲۳۲، ۱۲۳۳، ۱۲۳۴، ۱۲۳۵، ۱۲۳۶، ۱۲۳۷، ۱۲۳۸، ۱۲۳۹، ۱۲۴۰، ۱۲۴۱، ۱۲۴۲، ۱۲۴۳، ۱۲۴۴، ۱۲۴۵، ۱۲۴۶، ۱۲۴۷، ۱۲۴۸، ۱۲۴۹، ۱۲۵۰، ۱۲۵۱، ۱۲۵۲، ۱۲۵۳، ۱۲۵۴، ۱۲۵۵، ۱۲۵۶، ۱۲۵۷، ۱۲۵۸، ۱۲۵۹، ۱۲۶۰، ۱۲۶۱، ۱۲۶۲، ۱۲۶۳، ۱۲۶۴، ۱۲۶۵، ۱۲۶۶، ۱۲۶۷، ۱۲۶۸، ۱۲۶۹، ۱۲۷۰، ۱۲۷۱، ۱۲۷۲، ۱۲۷۳، ۱۲۷۴، ۱۲۷۵، ۱۲۷۶، ۱۲۷۷، ۱۲۷۸، ۱۲۷۹، ۱۲۸۰، ۱۲۸۱، ۱۲۸۲، ۱۲۸۳، ۱۲۸۴، ۱۲۸۵، ۱۲۸۶، ۱۲۸۷، ۱۲۸۸، ۱۲۸۹، ۱۲۹۰، ۱۲۹۱، ۱۲۹۲، ۱۲۹۳، ۱۲۹۴، ۱۲۹۵، ۱۲۹۶، ۱۲۹۷، ۱۲۹۸، ۱۲۹۹، ۱۳۰۰، ۱۳۰۱، ۱۳۰۲، ۱۳۰۳، ۱۳۰۴، ۱۳۰۵، ۱۳۰۶، ۱۳۰۷، ۱۳۰۸، ۱۳۰۹، ۱۳۱۰، ۱۳۱۱، ۱۳۱۲، ۱۳۱۳، ۱۳۱۴، ۱۳۱۵، ۱۳۱۶، ۱۳۱۷، ۱۳۱۸، ۱۳۱۹، ۱۳۲۰، ۱۳۲۱، ۱۳۲۲، ۱۳۲

کلیات
اسین

۲۱۷

محدود

$$\text{سر} = (۱ - ۲ - ۲) \frac{(۱ + ۲)}{۲} = \frac{(۱ + ۲)}{۲} - (۱ + ۲) = \frac{(۱ + ۲)}{۲} - (۱ + ۲)$$

پس

$$\text{جم سر} + \frac{(۱ - ۲)}{۲} \text{ جب سر} = \text{جم} (۱ + ۲) + \frac{(۱ - ۲)}{۲} \text{ جب} (۱ + ۲) + \text{بر}$$

$$\text{اسین بر} = \frac{۱ + ۲}{۲}$$

اسے معلوم ہوا کہ

$$۱ - \frac{(۱ - ۲)}{۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{(۱ - ۲)}{۲} = \frac{۱ - (۱ - ۲)}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$$\text{اسوا سطی} = \frac{\text{جب} (۱ + ۲)}{۲}$$

اسے معلوم ہوا کہ

$$\text{جمع} \frac{۱}{۱ + ۲} = \text{کچ} [\text{جب بر} + \text{جب ۳ بر} + \text{جب ۵ بر} + \dots + \text{جب} (۲ - ۱) \text{ بر}]$$

علم مثلث سے کہ ۲۲ باب کے موافق مجموعہ اس سلسلہ جو ب کا برابر جیسا کہ بر
کے ثابت ہو سکتا ہے بالفعل اس صورت میں کہ $\frac{۱ + ۲}{۲}$ کہ اور جیسا کہ بر $\frac{۱}{۲}$ اسوا

$$\text{جمع} \frac{۱}{۱ + ۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جب} \frac{۱ + ۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

یہ ظاہر ہے کہ جمع $\frac{۱}{۱ + ۲}$ اور کے نتیجہ کا نصف ہے یعنی

$$\text{جمع} \frac{۱}{۱ + ۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جب} \frac{۱ + ۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

(۲۵۵) دفعہ گذشتہ کی آخر صورت قانونیہ میں $\frac{۱}{۲}$ = د کہ اور فرض کر دو کہ $\frac{۱ + ۲}{۲}$ کہ

تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{جمع} \frac{۱}{۱ + ۲} = \frac{۱}{۲} \text{ کہ جب کہ} \quad (۱)$$

یہ نتیجہ اور سب صورتوں میں مستحکم ہے کہ ک کی قیمت . اور کے درمیان ہو اسوا سطی کہ
ثبت صحاح م اور ن کے وسطی مرن یہ قید ہے کہ م چوٹان سے ہو اور اسوا سطی
م اور ن کو مناسب پر منتخب کر کے $\frac{۱ + ۲}{۲}$ کو برابر کسی معین کہ سر و جب کے جگہ کا نسبتاً

حقت حالت اختصار میں ہو کر سکتے ہیں اگرچہ ہم $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ کو کسی سر جو یک برابر جبکہ نسبتاً طاق
حالت اختصار میں ہو ٹھیک ٹھیک نہیں کر سکتے مگر ہم اس کو ایسا بنا سکتے ہیں کہ
وہ اس کسر سے ایسا کم فرق رکھی جتنا ہم چاہیں ہیں اسی استخراج نتیجہ مطلوب کا ہو جائیگا
آخر نتیجہ میں لاگو بجائی کے رکھو ہمیں د کوئی مثبت مقدار ہے پس

$$\text{صبح} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{صبح} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{یعنی} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{فرض کرو کہ } r = \text{صوتو صبح} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{د جب ک کہ}$$

مثبت مقدار صو اور د کے لئے فقط یہ قید ہی ہی کہ صو چھوٹا د سے ہو

طالب علم کو غالباً کوئی بڑی دقت اس ترکیب میں نہیں معلوم ہوئی ہوگی جسے کہ مساوات (۱) کی

صدافت اس حالت میں ثابت ہوئی کہ ایک کسر ایسی ہو جبکہ نسبتاً طاق حالت اختصار میں ہو

یا وجود اس بات کے ہم کو مناسب معلوم ہوتا، کہ چند باتیں ایسی لکھیں کہ جسے ہمارے دعو کا اثبات

قطعی ہو اور اسے مشق ہی خوب اس باب کے مضامین میں طلبہ کو ہو جائے

$$\text{فرض کرو کہ } r = \text{صبح} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{لو} = \text{صبح} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{د کے لئے رکھو تو یہ دریافت ہوگا کہ}$$

$$\text{صبح} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{لو} = \text{صبح} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{اسو } \frac{1}{2} \text{ زلا} = \text{صبح} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ زلا}$$

$$\text{مساوات (۲) سے ثابت ہوتا ہے کہ د کے حدود غائی اور ا کے درمیان پہلے منفی ہے اگر}$$

$$\text{کو } 1 - \text{کو} \text{ بالاستقلال مثبت ہے اور مثبت ہی اگر کو } 1 - \text{کو} \text{ بالاستقلال منفی ہی}$$

$$\text{اسے معلوم ہوا کہ پہلے منفی ہے}$$

کو دوم کلی یو لری کہتے ہیں اور اوکو رمز جیم (ن) سے تعبیر کرتے ہیں

اس کلی کو کبھی جیم کی کلی بھی کہتے ہیں

اب ہم بعض خواص ان کلیات کی بیان کرتے ہیں اور ان کلیات میں ن اور م اور

مثبت مقدار پر مستند فرض کی گئی ہیں

(۲۵۷) یو لری اول کلی میں لا = ۱ - سے رکھو تو

ایم لا^۱ (۱-۱) لا^۱ زلا = ایم لا^۱ (۱-۱) لا^۱ سے

اسے معلوم ہوا کہ ل اور م میں تبادل ہو سکتا ہے اور اوی کچھ کلی کی قیمت میں فرق نہیں

ب (ل و م) = ب (م و ل)

اب یو لری اول کلی میں لا = $\frac{1}{1+1}$ کے رکھو تو

ایم لا^۱ (۱-۱) لا^۱ زلا = ایم لا^۱ (۱-۱) لا^۱ سے

اور اسے کلی میں لا = $\frac{1}{1+1}$ کے رکھو تو

ایم لا^۱ (۱-۱) لا^۱ زلا = ایم لا^۱ (۱-۱) لا^۱ سے

(۲۵۸) فرض کرو کہ تی^۱ = ۱ پس لا = لوگ $\frac{1}{1}$ تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ایم تی^۱ لا^۱ زلا = ایم (لوگ $\frac{1}{1}$) لا^۱ زلا

اسے ایک اور صورت جیم (ن) کی شکل ہوتی ہے

(۲۵۹) کلی بالا خبر اسے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ایم تی^۱ لا^۱ زلا = - تی^۱ لا^۱ + ایم تی^۱ لا^۱ زلا

اور تی^۱ لا^۱ معدوم ہوتی ہے جب لا = - اور نیز جب لا = ص (عام حساب الجبریات کی دفعہ ۵۲)

ایم تی^۱ لا^۱ زلا = ص ایم تی^۱ لا^۱ زلا

یعنی جیم (ن+۱) = ص جیم (ن)

چونکہ ایم تی^۱ لا^۱ زلا = - تی^۱ تو اسی یہ حاصل ہوتا ہے کہ ایم تی^۱ لا^۱ زلا = ۱ یعنی

بحکم دفعہ ۲۵۵ کے

$$\text{جیم (م)} = (م - ۱) = \frac{\text{کہ}}{\text{جیم کہ}}$$

$$(۲۴۳) م = \frac{۱}{۳} \text{ آخر نتیجہ میں رکھو تو}$$

$$\text{جیم} \left(\frac{۱}{۳}\right) \text{ جیم} \left(\frac{۱}{۳}\right) = \text{کہ}$$

$$\text{اواسطے جیم} \left(\frac{۱}{۳}\right) = \text{کہ}$$

بغیر دفعہ ۵۵ کے ہم کو یہ حاصل ہے کہ

$$\left[\text{جیم} \left(\frac{۱}{۳}\right)\right] = \frac{۲}{۳} = \frac{۱ - \frac{۱}{۳}}{۳ + ۱} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \text{ جمع } ۲ = \frac{\text{زلا}}{\frac{۱}{۲} + ۱} \times ۲ = \frac{۲}{۳} = \text{کہ}$$

$$\text{اواسطے جیم} \left(\frac{۱}{۳}\right) = \text{کہ}$$

اب ایک اور ثبوت آخر نتیجہ کا لکھتے ہیں

فرض کرو کہ $\text{جمع تی} = \text{زلا}$ تو یہ ظاہر ہے کہ لوہی

$$= \text{جمع تی} = \text{زلا}$$

$$\text{پس } \text{لوہی} = \text{جمع تی} = \text{زلا} \times \text{جمع تی} = \text{زلا}$$

$$= \text{جمع تی} = \text{زلا} = \text{جمع تی} = \text{زلا} = \text{جمع تی} = \text{زلا}$$

اور دفعہ ۲۰۸ میں ثابت ہوا کہ کلی ثبات

$$= \frac{۱}{۳} = \text{جمع تی} = \text{زلا} = \text{جمع تی} = \text{زلا} = \text{جمع تی} = \text{زلا}$$

$$\text{اواسطے } \text{لوہی} = \text{کہ}$$

$$\text{اب جیم} \left(\frac{۱}{۳}\right) = \text{جمع تی} = \frac{۱}{۳} = \text{زلا} = \text{جمع تی} = \text{زلا} = \text{جمع تی} = \text{زلا}$$

$$\text{جیم} \left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۲}{۳} = \text{جمع تی} = \text{زلا} = \text{جمع تی} = \text{زلا} = \text{جمع تی} = \text{زلا}$$

(۲۴۸) اب ہم ایک صورت بیانہ جیم (ن) کی لکھینگے جسے ایک اور اثبات دفعہ ۲۴۲ کے

نتیجہ کا ہوگا ہم کو معلوم ہے کہ حد غائی $\frac{۱}{۳}$ کی اوس حالت میں کہ وہ غیر محدود کم ہو

لوگ لاسے اسے معلوم ہوا کہ

$$(لوک \frac{1}{n})^{1-u} = حدفاشی \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^{1-u}$$

پس ہم یہ لکھ سکتے ہیں کہ

$$(لوک \frac{1}{n})^{1-u} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^{1-u} +$$

اس میں ایسی مقدار ہے جو غیر متناہی کم ہوتی ہے جب ہر غیر متناہی کم ہو

$$= \frac{1}{n} \text{ کے رکھو تو بموجب دفعہ ۲۵۸ کے}$$

$$\text{جیم (ن)} = \text{د}^{1-u} \text{ امع (۱-لا)}^{1-u} \text{ زلا + امع و زلا}$$

اول کلی میں لا = دے رکھو تو

$$\text{جیم (ق) - امع و زلا} = \text{مع دے}^{1-u} (۱-ے)^{1-u} \text{ اے}$$

یہ ہمارا اختیار میں ہے کہ دو کو ایک صحیح عدد مقرر کریں تو بائیں طرف کلی کو دفعہ ۳۳ میں

$$\frac{1-u}{n} \cdot \frac{2 \times 3 \times \dots \times n}{(1+u)(1+2u) \dots (1+(n-1)u)}$$

اگر د غیر متناہی زیادہ ہو تو محدود ہوتا ہے اور ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جیم (ن)} = حدفاشی \frac{1-u}{n} \cdot \frac{2 \times 3 \times \dots \times n}{(1+u)(1+2u) \dots (1+(n-1)u)}$$

(۲۵۵) دفعہ گذشتہ کے نتیجے سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جیم (ن)} = \frac{[1 - (\frac{1}{n})^{1-u}][1 - (\frac{1}{n+1})^{1-u}][1 - (\frac{1}{n+2})^{1-u}]}{(1-u)(1-u+1)(1-u+2) \dots}$$

ایک خاص صورت اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے کہ $n=1$ کے فرض کریں تو

$$\text{جیم (۱-م)} \text{ جیم (۱+م)} = \frac{1}{(1-u)(1-u+1)(1-u+2) \dots}$$

صورت بیانہ بائیں طرف کی برابر جیم کے ہے علم ثلث شیو کا ۳۳ باب دیکھو پس

$$\text{جیم (۱-م)} \text{ جیم (۱+م)} = \text{جیم (م)}$$

$$\text{اس واسطے جیم (م) جیم (۱-م)} = \text{جیم (م)} \dots \text{ (دفعہ ۲۵۹)}$$

(۲۵۶) اب ہم یہ مساوات قائم کرینگے ن صحیح عدد ہے کہ

$$\text{جیم (ن)} \text{ جیم (ن-۱)} \text{ جیم (ن-۲)} \dots \text{ جیم (۱)} = \frac{(1-u)^{1-u}}{(1-u)^{1-u}}$$

اس میں $\frac{1}{n}$ لوگ جیم (۱) کے جگہ جب $\frac{1}{n} = 1$ کے ہو۔ سی قائم ہوتا ہے
 سلسلہ جسکی n میں رقم $\frac{1}{n}$ ۔ $\frac{1}{n} = \frac{1}{1+n}$ بھی موافق لاکے ہر شیت قیمت کے
 انضمامی ہو کہونکہ ہم اس امر واقعی کو یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ وہ سلسلہ اس طرح پیدا ہوتا ہے
 کہ سلسلہ انضمامی جسکے تمام رقمیں ایک ہی مقدار رکھتی ہیں کئی حدود وغائی متناہی درمیان کی گئی
 یا سلسلہ کا انضمامی ہونا اس امر واقعی کو مستند کر کہ رقم عام $\frac{1}{n} = \frac{1}{1+n}$ (۱) ہی
 اور وہ کم بہ نسبت $\frac{1}{n} = \frac{1}{1+n}$ کے پس سلسلہ تعداد آچھوٹا بہ نسبت ایک اور سلسلہ
 کے ہوا جسکا انضمامی ہونا ہم کو معلوم ہے

مقدار سی کو یو لٹر کی مقدار مستعمل کہتے ہیں وہ طرح طرح کی صورتیں اپنے دکھاتی ہے
 وہ اوپر اس صورت - جیم $\frac{(1)}{(1)}$ یعنی - جیم (۱) کے صورت میں نمودار ہوئی ہے
 اب جیم (۱) = جمع سی $\frac{1}{n} = \frac{1}{1+n}$ زلا اس واسطے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے
 کہ جیم (۱) = جمع سی $\frac{1}{n} = \frac{1}{1+n}$ لوگ لازماً اور

جیم (۱) = جمع سی $\frac{1}{n} = \frac{1}{1+n}$ لوگ لازماً

(۱) میں فرض کرو کہ $\frac{1}{n} = 1$ تو

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{1+n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

n غیر متناہی زیادہ کرو تو بائیں طرف کا رکن ایک خاص کلی یعنی $\frac{1}{n}$ جمع $\frac{1}{n}$ لوگ جیم (۱) زلا

یعنی لوگ (۲) - لوگ جیم (۱) یعنی صفر ہو جائیگی

اسے معلوم ہوا کہ حد غائی جیم $\frac{(1)}{(n)}$ - لوگ n کی جب n غیر متناہی ہو صفر ہے

(۳) میں فرض کرو کہ لا غیر متناہی تو ختم نتیجہ یہی نکالا ہے اسکی ہیئت سے ہم کو معلوم ہوتا ہے کہ

جب n غیر متناہی ہو تو سی برابر حد غائی

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

موافق اصول کے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ حد غائی تقابلی جبر مقابلہ کا ۲۵۵ باب ۱۲ میں لکھا

قیمت ۳ کے عشاریہ کے دس مرتبہ تک ۲۵۵۴۲۱۵۴۴۷۵ ہے

حساب اسکا پچاس مرتبہ کے عشاریہ تک شینکس حساب نے کیا ہے

(۲۵۵) مساوات (۲) دفعہ گذشتہ میں لاکو ۱۱ سے تبدیل کرو تو

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{11(1+11)} + \frac{1}{11(1+11)^2} + \frac{1}{11(1+11)^3} + \dots = \frac{1}{11} \text{ لوگ جیم (۱+۱۱)}$$

۲-۱ دفعہ جزئی تو تو

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{11(1+11)} + \frac{1}{11(1+11)^2} + \dots = \frac{1}{11} \text{ لوگ جیم (۱+۱۱)}$$

فرض کرو کہ صر سلسلہ لا نہایت ۱ + $\frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots$ کو تعبیر کرنا ہے
تو اگر ۲ چوٹا ۲ سے نہ ہو تو قیمت $\frac{1}{11} \text{ لوگ جیم (۱+۱۱)}$ کی

۱-۱ (۱-۱) صر ہی جب کہ ۱ = ۰

و نیز قیمت $\frac{1}{11} \text{ لوگ جیم (۱+۱۱)}$ کی - سی ہوگی جب کہ ۱ = ۰

اسے معلوم ہوا کہ موافق ضابطہ میک لارن حساب کے

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \dots = \frac{1}{11} \text{ لوگ جیم (۱+۱۱)}$$

خاصیت کو دفعہ ۲۵۵ کے مساوات (۱) کے ساتھ شامل کریں تو یہ نتیجہ نکلی گا کہ

اگر جیم (۱۱) موافق لاکے اول تمام قیمتوں کے جو ۱ اور ۱ کی درمیان ہیں یا موافق اول

تمام قیمتوں کے جو ۱ اور ۱ کے درمیان ہیں یا موافق اول تمام قیمتوں کے جو ۱ اور ۱ کے درمیان

ہوں معلوم ہیں اور علی ہذا القیاس تو جیم (۱۱) موافق لاکے تمام مثبت قیمتوں کے معلوم ہوا ہے

اور سلسلہ جو ابھی معلوم ہوا ہے اسے قیمت لوگ جیم (۱۱) کی بھی معلوم ہو جائیگی اور ہر اور

جیم (۱۱) کی قیمت موافق لاکے اول تمام قیمتوں کے جو ۱ اور ۱ کے درمیان واقع ہو

پس ہم جم (لا) کا حساب موافق لاکھی تمام قیمتوں کے کر سکتے ہیں
بجز حصے کے محدود لوگ جم (لا) کے قیمتوں کے بنائی ہے اور ہم جدول اختصار کے ساتھ
ڈی مورگن کے علم حساب انجینئر میں بھی موجود ہے
(۲۴۰) سلسلہ جو لوگ جم (لا+۱) کے واسطی حاصل ہوا، او کو واسطی درجہ کا اضافی بنا سکتے ہیں

$$\begin{aligned} \text{لوگ جم (لا+۱)} &= \text{س} - \text{لا} + \frac{\text{صر} \cdot \text{لا}}{۲} + \frac{\text{صر} \cdot \text{لا}^۲}{۳} + \dots \\ \text{لوگ جم (لا-۱)} &= \text{سی} - \text{لا} + \frac{\text{صر} \cdot \text{لا}}{۲} + \frac{\text{صر} \cdot \text{لا}^۲}{۳} + \dots \\ \text{اب جم (لا+۱) جم (لا-۱)} &= \text{لا جم (لا) جم (لا-۱)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{لا} \cdot \text{لا}}{\text{جب لا}} \text{ بموجب دفعہ ۲۴۲ کے}$$

$$\begin{aligned} \text{اسو اسٹ لوگ جب لا} &= \text{صر} \cdot \text{لا} + \frac{۱}{۲} \text{صر} \cdot \text{لا}^۲ + \frac{۱}{۳} \text{صر} \cdot \text{لا}^۳ + \dots \\ \text{اور لوگ جم (لا+۱)} &= \frac{۱}{۲} \text{لوگ جب لا} - \text{س} - \text{لا} - \frac{\text{صر} \cdot \text{لا}}{۳} - \frac{\text{صر} \cdot \text{لا}^۲}{۴} - \dots \end{aligned}$$

اس نتیجہ کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{لوگ جم (لا+۱)} = \frac{۱}{۲} \text{لوگ جب لا} - \frac{۱}{۲} \text{لوگ} \frac{\text{لا}+۱}{\text{لا}-۱}$$

$$+ (۱-س) - \text{لا} - \frac{۱}{۲} (\text{صر} - ۱) - \frac{۱}{۳} (\text{صر} - ۱) - \dots$$

اب آخر سطر میں جو سلسلہ لکھا ہی وہ بہت جلد اضافی اوضاع میں ہو جائیگا کہ لا تعداد چھوٹا
۱ سے ہو

(۲۴۱) دفعہ ۲۴۸ کے مساوات (۲) سے ہم کو معلوم ہوتا کہ $\frac{\text{لا}}{۲}$ لوگ جم (لا) ہمیشہ
مثبت ہی اور اگر لا مثبت ہو تو وہ متناہی ہی ہے اسی معلوم ہوا کہ $\frac{\text{لا}}{۲}$ لوگ جم (لا) جبراً
کے موافق ایسی ہی زیادہ ہوتا رہی جیسے کہ لا سے غیر متناہی زیادہ ہوتا ہے اور

سوا ایک غصہ کے وہ کبھی محدود نہیں ہوتی پس جم (لا) ان لاکھی قیمتوں کے ترقیب میں
کوئی حد اضافی زیادتی کی نہیں رکھ سکتا ہی اور وہ ایک کے کوئی حد اضافی کمی کی بھی نہیں رکھ سکتا
اس بات کا دیکھ لینا کچھ بات نہیں ہی کہ جم (لا) حد اضافی کمی کے لا ۱ اور لا ۲ کے درمیان رہے

کلمات

۲۲۹

محدود

کلمات
جیم (۱+۱) کے خلاف ایسی کمی کے تشخیص کرنے کے واسطے ہم جرئی کے ایک سلسلہ کے

جو لوک جیم (۱+۱) کے واسطی حاصل ہوا، لین اور حاصل کو برابر صفر کے لکھیں اسے

ایک سوات حاصل ہوگی جسے تمہارا ہی یہ معلوم ہوگا کہ $1 + \lambda =$ وغیرہ 1432414

(۲۷۲) بہت سے کلیات محدود ارقام جسم جملوں میں بیان ہو سکتے ہیں اب ہم بعض مثالیں لکھتے ہیں۔

کلی صبح ہی طالع زلا میں طالع کی جگہ رکھو تو

جمع $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ یعنی $\frac{1}{6}$ جہم $\frac{1}{6}$ یعنی $\frac{1}{6}$ حاصل ہوگا

اب پیہر $\frac{ایم (ل-۱)^{-۱} (ل-۱-۱)^{-۱} (ل-۱-۱)^{-۱}}{(ل+۱) (ل+۱) (ل+۱)} = \frac{ل}{ل+۱}$ رکھو تو ہم کو یہی حاصل ہوگا

$$\frac{1}{\text{ط}(1+\text{ط})} \cdot \text{امح} \cdot \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{\text{زوليعني}} \cdot \frac{1}{\text{ط}(1+\text{ط})} \cdot \frac{1}{\text{جيم (ل) جيم (م)}}$$

پہرابع کی^۱ (۱-۲)^۱ نزلا میں لا = د کے رکھو نو بہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\frac{1}{p} \text{ امیج } \frac{1}{q} - (1-s)^{-1} \text{ نری یعنی } \frac{1}{p} \text{ جیم } \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} \text{ جیم } \frac{1}{q} - (1-s)^{-1} \text{ نری یعنی } \frac{1}{p} \text{ جیم } \frac{1}{q}}$$
$$\text{پس کج مع جبع بر حرم برزبر} = \text{مع لا} (1 - \frac{1}{p})^2 \text{ از لا} = \frac{\text{جیم} (1 + \frac{1}{p})}{(1 + \frac{1}{p})} = \frac{\text{جیم} (1 + \frac{1}{p})}{(1 + \frac{1}{p})}$$

پہرے میں لا = $\frac{لا(1-لا)}{لا+م}$ رکھو تو یہ حاصل ہوگا $\frac{ص}{ط(1-ص)+ص}$

$\frac{1}{\text{ط ص م}} \frac{1}{\text{ل م}} (1-5) \text{ م}^1 \text{ ر ذ ی عی} \frac{\text{جیم (ل) جیم (م)}}{\text{ط ص م م م (ل) م}}$

(۲۴۳) طبع لا^۱ (ظ-لا)^۲ زلا میں لا = ط و س کہو تو یہ حاصل ہوگا کہ

$\frac{L + M - A}{L + M} = \frac{A - B}{A}$

(۲۷۴) اس ضعاف کلی کی قیمت دریافت کرو کہ

مع مع مع ... ل ... م ... ا ... ا ... ا ... زلازل و زلزلے ...

کلی طرح لی گئی ہے کہ اوسین فیصد یعنی یہ نام مثبت قیمتیں اس شرط کے ساتھ مقرر کی گئی ہیں کہ لا + و + لے = .

$$ن (ل + م + ن + \dots) \quad \text{حصہ } ۱ - \dots + ن + م + ل \quad \text{حصہ } \Delta$$

یعنی جیم (ل) جیم (م) جیم (ن) \dots $\frac{۱ - \dots + ن + م + ل}{\text{حصہ } \Delta}$

(۲۷۷) مطلوب یہ ہے کہ مضاعف کلی

$$\text{مع مع } \dots \quad \frac{۱ - \dots + ن + م + ل}{\text{حصہ } \Delta} \quad \text{ج (لا + س + ع + \dots)} \quad \text{زلاؤ گئے}$$

کو کلی مفرد میں تبدیل کریں

کلی ایسے لی گئی کہ تمام مقداریں متغیر کے مثبت قیمتیں اس شرط کو پورا کرتی ہیں کہ لا + س + ع +

بڑا اس سے نہیں ہے

سانی کے واسطی ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ تین مقداریں متغیر ہیں تو بموجب دفعہ گذشتہ کے

اگر ج (لا + س + ع) کے جگہ واحد لکھا جائے تو کلی کا وہ حصہ جو مقدار متغیر کے مجموعہ کو حصہ اور حصہ +

کے درمیان فرض کرنے سے پیدا ہوتا ہے آخر کو یہ ہو جائیگا کہ

$$\text{جیم (ل) جیم (م) جیم (ن)} \quad \frac{۱ - \dots + ن + م + ل}{\text{حصہ } \Delta} \quad \text{جیم (ل + م + ن)}$$

اور اگر مجموعہ مقداریں متغیر کا حصہ اور حصہ + حصہ کے درمیان واقع ہو تو قیمت ج (لا + س + ع)

کی صرف ج (حصہ) سے تفاوت بقدر اسے مقدار کے رکھی کا جسکا مرثیہ مثل Δ حصہ کی ہے

اسے معلوم ہوا کہ Δ حصہ کے مربع کے چھوڑ دینے پر کلی کا وہ حصہ جو مقدار متغیر کے مجموعہ کو

حصہ اور حصہ + Δ حصہ کے درمیان فرض کرنے سے پیدا ہوتا ہے آخر کار

$$\text{جیم (ل) جیم (م) جیم (ن)} \quad \frac{۱ - \dots + ن + م + ل}{\text{حصہ } \Delta} \quad \text{ج (حصہ)} \quad \text{حصہ ہو گا}$$

جیم (ل + م + ن) اسے معلوم ہوا کہ کلی کلی یہ ہے کہ

$$\text{جیم (ل) جیم (م) جیم (ن)} \quad \frac{۱ - \dots + ن + م + ل}{\text{حصہ } \Delta} \quad \text{مع مع ج (حصہ)}$$

جیم (ل + م + ن) یہ عمل سب صورتوں پر حاوی ہے خواہ مقدار متغیر کی کچھ ہی تعداد ہو

(۲۷۸) ہیطرح کلی مثلثہ

$$\text{مع مع فر } ۱ - \dots + ن + م + ل \quad \text{ع (م) + (س) + (ط) + (ز) فر زمر$$

مقادیر متغیر کے تمام مثبت قیمتوں کے اس شرط کے ساتھ کہ

$$\left(\frac{م}{س}\right) + \left(\frac{ق}{ص}\right) + \left(\frac{ط}{ز}\right)$$

بڑا س سے نہ ہو برابر

$$\frac{\left(\frac{م}{س}\right) + \left(\frac{ق}{ص}\right) + \left(\frac{ط}{ز}\right)}{\left(\frac{م}{س}\right) + \left(\frac{ق}{ص}\right) + \left(\frac{ط}{ز}\right) + 1} \text{ سیمع ح (صہ) } ۱ - \frac{م}{س} + \frac{ق}{ص} + \frac{ط}{ز}$$

یہ عمل اور سب صورتوں پر جاری ہو سکتا ہے جنہیں تعداد متغیر کی کچھ ہی ہو (۲۷۹) کلی ثناء

$$\text{مع مع } \frac{۱ - \frac{م}{س} - \frac{ق}{ص} - \frac{ط}{ز}}{(لو + ط + لا + ص) + ۱}$$

کو کلی مفروضین تبدیل کرو

اس میں کلی لا اور د کے تمام مثبت قیمتوں کے موافق اس شرط کے ساتھ ہی لکھی ہیں کہ لا + د بڑا کہ سے نہ ہو اور لو اور ط اور ص مثبت مقادیر مستقلہ ہیں

فرض کرو کہ ط چھوٹا ص سے ہے تو ہم کو یہ حاصل ہے کہ

$$لو + ط + لا + ص = د + ط + (لا + ص) - (ط - ص) = د - ص$$

اس میں لو بجای لو + ط (لا + ص) کے اور سر بجای (ط - ص) کے قائم ہوا ہے

پس (لو + ط + لا + ص) - د - ص

$$= \frac{1 + (د + ص) + \frac{(د + ص)(1 + د + ص)}{2 \times 1} + \dots}{2}$$

یہاں سلسلہ الضامی ہے

اب کلی ثناء مفروضہ کی بہت اس طرح بدل سکتی ہے کہ اس کے ہر رقم پر دفعہ ۲۷۹ کے

ترکیب کو عمل میں لائیں پس کلی ثناء

$$= \frac{\left(\frac{م}{س}\right) + \left(\frac{ق}{ص}\right) + \left(\frac{ط}{ز}\right)}{\left(\frac{م}{س}\right) + \left(\frac{ق}{ص}\right) + \left(\frac{ط}{ز}\right) + 1} \text{ سیمع ح (صہ) } ۱ - \frac{م}{س} + \frac{ق}{ص} + \frac{ط}{ز}$$

$$\text{لو} - \text{ن لوگ ن} + (\text{لو}) = \text{ط} - \text{ن لوگ ن} \dots (۴)$$

لیکن بموجب ٹیلر حساب کے ضابطہ کے

$$\text{لوگ (ن + لو)} = \text{لوگ ن} + \frac{\text{لو}}{\text{ن}} - \frac{\text{لو}^2}{2(\text{ن} + \text{لو})^2}$$

اسمین ہر ایک کسر واجب ہے پس (۴) کی یہ صورت ہو جائیگی کہ

$$\text{ط} = \frac{\text{ن}^2}{2(\text{ن} + \text{لو})^2}$$

$$\text{اسوا} = \frac{\text{ط} (\text{ن})^2}{(\text{ن} + \text{لو})^2} \dots (۵)$$

$$\text{اسوا} = \text{لو} = \frac{\text{ط} (\text{ن})^2}{\text{ن}^2 - \text{برط}^2} \dots (۶)$$

$$\text{لیکن (۳) سے } \frac{\text{ن}^2}{\text{زط}} = \frac{\text{ط}^2}{\text{ن} - \text{ط}} + \frac{\text{ط}^2}{\text{ن}}$$

$$\dots (۷) \quad \text{ط} = \frac{\text{ن}^2}{\text{ن}^2 - (\text{برط})^2} \dots (۸)$$

اسے معلوم ہوا کہ (۲) یہ ہو جائیگی کہ

$$\text{جمع تی} = \text{لا زلا} = \text{تی} \text{ ن} - \text{جمع تی} \text{ ط} = \text{ط}^2 (\text{ن}^2 - (\text{برط})^2) \dots (۹)$$

$$\text{اور جمع تی} \text{ ط} = \text{زط} = \text{ط} (\text{ن})^2$$

$$\text{جمع تی} \text{ لا زلا} = \text{تی} \text{ ن} (\text{ن}^2 - (\text{برط})^2) + 1 + (\text{ن}^2 - (\text{برط})^2) \text{ جمع تی} \text{ ط}^2 (\text{ن}^2 - (\text{برط})^2) \dots (۱۰)$$

لیکن اس سبب کے کہ برنٹ ہی اور واحد ہو چکا ہو تو عددی قیمت جمع تی ط (۱ - برط) ط

کی ہو جائے گی ط ط سے ہے یعنی ہو چکی برنٹ کے ہر پس (۱۰) سے پہنچ جائے گی کہ

جب ن غیر محدود زیادہ ہوتا ہے تو قیمت جم (ن + ۱) کی تی ن (ن^2 - (برط)^2) کے سحر

قریب احد کے پہنچے ہے اور یہی اسکی حد غائی ہوتی ہے

ہم دیکھتے ہیں کہ اصلی مساوات (۱) میں ط ہے اور جو ط نہیں ہے اسے معلوم ہوا کہ

ط کی علامت کا ہم کو اختیار ہے اور ہم اسکو ایسا مقرر کر سکتے ہیں کہ (۵) کے مطابق

اور اور اور دو مثبت فرض کو چاہیں

کلیات محدود کا جزئیات سے حاصل کرنا یا لحاظ معادیرست قدر کے کلی لینے

(۲۸۳) اب ہم چند مثالیں لکھتے ہیں جن میں لمبھا مقدار مستقل کے جزی لیکر اوکے واسطے سے

کلی محدود حاصل کرتے ہیں دفعہ ۲۱۳ دیکھو

قیمت صمیع سی $\frac{۲}{۳}$ لا $\frac{۲}{۳}$ حم $\frac{۲}{۳}$ لا زلا کی دریافت کرو کلی محدود کا نام لو رکھو

زلا = $\frac{۲}{۳}$ صمیع لا سی $\frac{۲}{۳}$ لا جب ہم لا زلا

بائیں طرف کے رکن کی کلی بالا جزا لو تو

$$\frac{\text{زلا}}{\text{زلی}} = \frac{۲ - \text{لی لو}}{\text{طی}}$$

$$\text{اسوا سطر} = \frac{\text{زلا}}{\text{زلی}} = \frac{۲ - \text{لی لو}}{\text{طی}}$$

$$\text{اسوا سطر لو کی} = \frac{\text{لی}}{\text{طی}} + \text{مقدار مستقل}$$

$$\text{اسوا سطر لو} = \frac{\text{لی}}{\text{طی}}$$

اس میں ایک مقدار مستقل لمبھا تو کچھ یعنی اوس میں لا داخل نہیں ہے
اوکے دریافت کرنے کے واسطے ہم لا کے فرض کرتے ہیں تو لو کی یہ صورت ہوگی کہ

صمیع سی $\frac{۲}{۳}$ لا زلا یعنی $\frac{۲}{۳}$ (دفعہ ۲۷۲) اسے معلوم ہوا کہ

$$۱ = \frac{\text{لی}}{\text{طی}} \text{ اور}$$

$$\text{صمیع سی} \frac{۲}{۳} \text{ لا زلا} = \frac{\text{لی}}{\text{طی}} \text{ سی} \frac{۲}{۳} \text{ لا}$$

(۲۸۴) دفعہ ۲۱۴ میں ہم نے بیان کیا ہے کہ جب کلی کی حدود غائی میں ایک غیر تنہا ہی ہوتی ہے

تو عمل جزئی کا لمبھا مقدار مستقل کے غیر مصنون ہوتا ہے اس صورت حال میں یہ سب

درست ہو جاتا ہے ہم کو یہ ثابت کرنا ہے کہ صمیع سی $\frac{۲}{۳}$ لا ق زلا معدوم

جب ہوتا ہے کہ ق آخر کو غیر محدود چھوٹا ہو یہ ظاہر ہے کہ یہ مقدار تعداد چھوٹی

بہ نسبت ق صمیع سی $\frac{۲}{۳}$ لا زلا اس میں ق بڑی سی بڑی قیمت ق کی ہے یعنی چھوٹا بہ نسبت

ق کے ہے لیکن یہ معدوم ہوتا ہے جب کہ ق معدوم ہوتا ہے اور اسی کے ساتھ صورت

اینده صورتوں میں ہی ہو سکتی ہیں

(۲۸۵) قیمت جمع ہی لا جب ہی لا زلا کی دریافت کرو اور اسکو لو سے تعبیر کرو تو

$$\begin{aligned} \frac{\text{ز لو}}{\text{ز لو}} &= \text{جمع ہی لا} \text{ جم ہی لا زلا} \\ \text{لیکن مع ہی لا جم ہی لا زلا} &= \text{هی لا} \text{ لو جب ہی لا - ک جم ہی لا} \\ \text{اسو اسطی جمع ہی لا} &= \text{جم ہی لا زلا} = \text{ک + لو} \\ \text{پس ز لو} &= \text{ک + لو} \end{aligned}$$

$$\text{اسو اسطی لو} = \text{مس + لو}$$

کسی مقدار مستقل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ لو معدوم ہی کے ساتھ ہوتا ہے، نتیجہ ک کی مثبت قیمت کے موافق سنحکم ہے اگر ہم فرض کریں کہ ک غیر متناہی کم ہوتا ہے تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{جمع جب ہی لا زلا} = \frac{\text{ک}}{\text{ک}}$$

اگر ہی مثبت ہو اور اگر ہی منفی ہو تو نتیجہ - ک ہوگا

اب ہم کلی محدود تشخیص کرتے ہیں کہ

$$\text{جمع جب ہی لا ہم صولا زلا}$$

اسو اسطی کہ وہ مساوی لہ

$$\frac{\text{ک}}{\text{ک}} \text{ جمع جب (ہی + صو) لا زلا} + \frac{\text{ک}}{\text{ک}} \text{ جمع جب (ہی - صو) لا زلا}$$

اور ان دو کلی محدود میں سے ہر ایک کی قیمت مقرر ہو سکتی ہے کہ

(۲۸۶) قیمت جمع ہی لا - (لا + ک) زلا کی دریافت کرو اسکو لو سے تعبیر کرو تو

$$\frac{\text{ز لو}}{\text{ز لو}} = ۲ - \text{جمع ہی لا} - (لا + ک) زلا$$

فرض کرو کہ لا = طے تو طے کی حدود قاضی ص اور - ہین اور ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ز لو}}{\text{ز لو}} = ۲ - لو$$

$$\text{اسو اسطی ر لو ک لو} = ۲ -$$

$$\text{اسو اسطی لو ک لو} = ۲ - + \text{مقدار مستقل}$$

اس واسطے لو = ۱۰ می ط

۱ کی تشخیص کرنے کے واسطے فرض کرو کہ ط = ۱۰ تو لو = ۱۰ اس واسطے

۱ = ۱۰ پس

صمیم می (لا + ط) زلا = ۱۰ می ط

(۲۸۷) بلحاظ مقدار مستقل کے بھی کلی لیکر کلیات محدود کو ہم تشخیص کیا کرتے ہیں اس اصول کو اس طرح قائم کرتے ہیں کہ

فرض کرو لو = صمیم می (لاوس) زلا

تو صمیم لوس = صمیم صمیم (لاوس) زس زلا

= صمیم صمیم می (لاوس) زلا زس

کیونکہ جب حدود غائی مستقل ہوں تو دماں کلی کی ترتیب کو خواہ کسی طرح لو

(دفعہ ۴۲) اب ہم بعض مثالیں اس ترکیب کے لکھتی ہیں

(۲۸۸) ہم کو معلوم ہے کہ صمیم می کہ لا زلا = ۱۰

طرفین کی کلی بلحاظ ک کے حدود غائی ط اور ص کے درمیان لو تو

صمیم می ط - می لا زلا = لوک ص

اس بات سے یہی متنبہ کرنا چاہی کہ صمیم می ط زلا اور صمیم می لا زلا دو تو

غیر متناہی ہیں اس واسطے کہ صمیم می ط زلا برابر نسبت می ط صمیم می لا زلا ہی اور

صمیم می لا زلا غیر متناہی ہے مگر یہ بیان خلاف اس بیان کے نہیں ہے کہ صمیم می ط - می لا زلا

غیر متناہی ہی اور اس کلی کی قیمت بغیر دریافت کرنے کے ہائی سی ثابت ہو سکتا ہے کہ وہ

متناہی اس واسطے کہ وہ برابر مجموعہ صمیم می (لا) زلا اور صمیم می (لا) زلا

کے ہے اس میں می (لا) = می ط - می لا اور ان کلیوں میں سے دوسرے کلی متناہی ہے

اس واسطے کہ وہ چھوٹی بہ نسبت مل صمیم می (لا) زلا کے ہے یعنی چھوٹی بہ نسبت

$$\frac{1}{s} \left(\frac{p}{s} - \frac{q}{s} \right) \text{ کے ہے}$$

پس ہم کو امتحان صلیح $\frac{p}{s}$ (۱) زلا کا کرنا ہے
اب بموجب ایک لارن حسب کے ضابط کے

$$\text{مخ (۱)} = (s - p) + \frac{q}{s} \text{ مخ (۲) بر}$$

اس میں بروئی کسری پس $\frac{p}{s}$ (۱) چوٹا بہ نسبت $s - p + \frac{q}{s}$ کے ہے
اس میں لٹری سے بڑی قیمت مخ (۱) کی اون قیمتوں میں سے ہے جو لاک سے
چوٹی قیمتوں کے موافق لی جائیں اسے معلوم ہوا کہ

$$\text{صلیح مخ (۱)} \text{ زلا چوٹا بہ نسبت } (s - p) + \frac{q}{s} \text{ کے ہے}$$

اور اس واسطے محدود ہے

(۲۱۹) ہم کو معلوم ہے کہ

$$\text{صلیح مخی کہ جم بق لازلا} = \frac{p}{s} + \frac{q}{s}$$

طرفین کی کلی بلحاظ کے حدود غائی ط اور ص کے درمیان لوگو

$$\text{صلیح مخی ط - مخی لا} = \text{جم بق لازلا} = \frac{p}{s} + \frac{q}{s}$$

(۲۴۰) فرض کرو $\frac{p}{s}$ صلیح جب بق لا زلا کو اسے اور $\frac{q}{s}$ صلیح جم بق لا زلا کو ب سے

تعبیر کرو اب قیمتیں لا اور ب کی تشخیص کرو دفعہ ۲۱۵ میں لکی تشخیص ایک اور کر کے

کلی زمین کو بجای لا کے رکھو تو

$$1 = \text{صلیح جب کر زلا}$$

اسے ثابت ہوتا ہے کہ لاکو کچھ تعلق بق سے نہیں ہے

$$\text{اور یہ ہم کو حاصل ہے کہ زبق} = \text{صلیح لا جب بق لازلا}$$

$$\text{اور صلیح ب زبق} = \text{صلیح جب بق لازلا}$$

$$\text{پس صلیح ب زبق} = \frac{\text{زبق}}{\text{صلیح لا جب بق لازلا}}$$

اسے معلوم ہوا کہ $\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱ = ۰$ (۱)
 مئی میں ضرب دو اور کلی کو تو اس سبب کہ اس نقل بلحاظ نق کے یہی حاصل ہوگا
 مئی $[\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱] =$ مقدار مستقل کے

اب خواہ کچھ ہی قیمت نق کے ہو تو ظاہر ہے کہ کلیات اور ب سے اور ب سے اور ب سے
 تعبیر کی گئی متناہی ہیں اسی معلوم ہوا کہ آخر مساوات میں مقدار مستقل صفر ہے
 اس واسطے کہ دائیں طرف کارکن جب نق غیر متناہی ہو معدوم ہوتا ہے
 پس $\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱ = ۰$ (۲)

(۱) اور (۲) سے $\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱ = ۰$

اس واسطے $\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱ = ۰$

اس میں س کوئی مقدار مستقل ہے اور (۲) سے

$۱ = ۱ - ۱ = ۰$ (۱) مئی = س
 اس واسطے $\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱ = ۰$

اب نق غیر محدود کم ہوتا ہے تو ب کے صورت یہ ہو جائیگی کہ $\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱ = ۰$ یعنی کے
 اسے معلوم ہوا کہ (۳) سے

$۱ = ۱ - ۱ = ۰$ اور ب = کچھ مئی

ہم نے نق کو مثبت فرض کیا ہے یہ ظاہر ہے کہ اگر نق منفی ہو تو ب کی وہی قیمت ہوگی جو نق کے
 مثبت ہونے سے ہوتی اور اگر نق کی علامت بدل جائے یعنی اگر نق منفی ہو تو ب = کچھ مئی
 اور $۱ = ۱ - ۱ = ۰$ کچھ

جمع $\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱ = ۰$ کچھ مئی جزئی بلحاظ نق کے تو یہی حاصل ہوگا
 جمع $\frac{ب}{ب} = ۱ - ۱ = ۰$ کچھ مئی

اور اسے کلی کی کلی بلحاظ نق کے حدود غائی اور س کے درمیان تو یہی حاصل ہوگا

$$\text{جمع} = \frac{\text{جب لی لا زلا}}{(1 + \frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \text{ کے } (1 - \frac{1}{2})$$

(۲۴۱) دفعہ گذشتہ میں کلیات اور ب کی قیمتوں کی تحقیقات نہایت استحکام کے ساتھ کی گئی ہے لیکن اوٹریک ب کے قیمت دریافت کرنی کی بعض اوقات لکھی جاتی ہے وہ نہایت اسان ہی مگر قابل اطمینان اور اعتماد نہیں اب ہم اس کی لکھتی ہیں کیونکہ اسے ایک بڑی بات معلوم ہوتی ہے

$$\text{فرض کرو کہ ب} = \text{جمع} = \frac{\text{جم لی لا}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ زلا}$$

$$\text{تو} \quad \frac{\text{زب}}{\text{زب}} = \text{جمع} = \frac{\text{لا جب لی لا}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ زلا}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{زب}}{\text{لی لا}} = \text{جمع} = \frac{\text{لا جم لی لا}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ زلا}$$

$$= \text{جمع} = \frac{\text{جم لی لا}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ زلا} + \text{جمع} = \frac{\text{جم لی لا}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ زلا}$$

$$= \text{جمع} = \frac{\text{جم لی لا}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ زلا} + \text{جمع} = \frac{\text{جم لی لا}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ زلا}$$

اب ہم بعض بنا پر جکا ہی تمام کرینگے یہ فرض کرتے ہیں کہ جمع جم لی لا زلا =

$$\text{بس} \quad \frac{\text{زب}}{\text{لی لا}} = \text{ب}$$

اس مساوات سے ب کو دریافت کریں طرفین مساوات کو ۲ ضرب میں ضرب میں اور کلی لحاظ لی کے لین تو

$$\left(\frac{\text{زب}}{\text{لی لا}} \right) = \text{ب} + \text{ب}$$

ابھی ایک مقدار مستقل ہے یعنی ب کو کچھ لگاؤ لی سے نہیں ہے بس

$$\frac{\text{زب}}{\text{لی لا}} = \text{ب} + \text{ب}$$

$$\frac{\text{زب}}{\text{لی لا}} = \frac{\text{ب} + \text{ب}}{1} = \text{ب} + \text{ب}$$

کلی یعنی سے ہم کو یہ حاصل ہونا ہے کہ

$$\text{لی لا} + \text{ب} = \frac{\text{زب}}{\text{ب} + \text{ب}} = \text{لوک} [\text{ب} + 1 + \text{ب}]$$

اس میں ک ایک اور مقدار مستقل ہے

پس $\text{لی} + \text{ک} = \text{ب} + \text{با} (\text{صه} + \text{ب})$

اشغال اور مجذور اور تحویل کرنے سے ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$\text{ب} = \text{س} + \text{لی} + \text{سی} + \text{تی}$

اس میں س اور س مقدار میں مستقل ہیں ان مقدار میں مستقل کی قیمتیں تشخیص کرنی چاہی
چونکہ ب غیر متناہی زیادہ ہوتا ہی تو $\text{س} =$ کے ہونا چاہی اور چونکہ $\text{ب} = \text{ک}$

جب $\text{لق} =$ تو $\text{س} = \text{ک}$ کے ہونا چاہی پس

$\text{ب} = \text{ک} + \text{تی}$

اب اس ترکیب میں جو باتیں ہم نے فرض کر لی ہیں ان کی تحقیقات کرتے ہیں
چونکہ $\text{س} + \text{تی} = \text{لق}$ جب لق لازماً $=$ تی ط ط جب لق $\text{لا} + \text{لق}$ جم لی لا

اور $\text{س} + \text{تی} = \text{جم}$ لی لا ط ط لی جب لی $\text{لا} - \text{ط}$ جم لی لا

اور ہم کو یہ حاصل ہی ص $\text{س} + \text{تی} = \text{لق}$ جب لق لا ط ط لی لا جم لی لا

ص $\text{س} + \text{تی} = \text{جم}$ لی لا ط ط لی لا جم لی لا

اگر ط اور ایک مقدار مثبت ہو

اگر $\text{ط} =$ کے فرض کرنا جائز ہو تو یہ حاصل ہوگا کہ

ص $\text{س} + \text{تی} = \text{لق}$ اور ص $\text{س} + \text{تی} = \text{جم}$ لی لا ط ط لی لا

چونکہ $\text{س} + \text{تی} = \text{لق}$ ط ط لی لا جم لی لا ط ط لی لا جم لی لا

اسی ظاہر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جیب اور جیب تمام دونوں زیادہ غیر متناہی کی ضرورت نہیں

اور اور صورتوں میں بھی اسی نتیجہ کا اظہار ہوگا پس اسلی یہ بیان کیا جائے کہ

رموز غیر المعین جب ص اور جم ص میں سے ہر ایک لیے شمار صورتوں میں ہیں

اور ص اور جم ص میں سے ہر ایک لیے شمار صورتوں میں ہیں

اس بات پر ہندوین کا بڑا اختلاف ہے اور ان کی جدا جدا رائیں ہیں اور کو ہر ایک

$$= \text{لاؤک (۱-۲ طحم لا + ط) - ۲ طمع} \quad \text{لاجب لا زلا}$$

$$۲-۱ طحم لا + ط$$

اسے معلوم ہوا کہ طچھوٹا بہ نسبت ا کے ہے

$$\text{کبمع} \quad \text{لاجب لا زلا} = \frac{۲-۱ طحم لا + ط}{۲ ط} \quad \text{لاؤک (۱+ ط) یعنی کچے لاؤک (۱+ ط)}$$

اگر ط بڑا بہ نسبت ا کے ہو تو حاصل

$$\text{کچے لاؤک (۱+ ط) - کچے لاؤک ط یعنی کچے لاؤک (۱+ ط)}$$

(۲۴۴) اگر لقی صحیح تو اسطرح یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{کبمع جم لں لاؤک (۱-۲ طحم لا + ط) = - کچے ط لں}$$

اگر طچھوٹا واحد سے ہوا - کچے ط لں کے اگر ط بڑا واحد سے ہو

(۲۴۵) دفعہ گذشتہ میں کلی کی کلی بالاجزا لو تو ہم کو یہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$\text{کبمع جب لاجب لں لا زلا} = \frac{۲-۱ طحم لا + ط}{۲ ط} \quad \text{کچے ط لں - ۱} \quad \text{اگر طچھوٹا واحد سے ہو}$$

یا کچے ط (۱+ ط) کے اگر ط بڑا واحد سے ہو

(۲۴۶) علیٰ ہذا القیاس صور مفصلہ معلوم

$$= \frac{۲-۱ طحم لا + ط}{۲ ط}$$

$$= ۱+ ۲ طحم لا + ۲ طحم لا + ۲ طحم لا + ۲ طحم لا + \dots$$

جس میں طچھوٹا بہ نسبت واحد کے ہے ہم بعض کلیات محدود کا استنباط کر سکتے ہیں

اگر لقی صحیح ہو تو

$$\text{کبمع} \quad \text{جم لں لا زلا} = \frac{۲-۱ طحم لا + ط}{۲ ط} \quad \text{کچے ط لں}$$

اسو سط کہ ہر ایک رقم جس کی کلی لے میں حدود غائی میں سے معدوم ہو جاتی ہے

مگر ۲ ط کبمع جم لں لا زلا باقی رہتی ہے

(۲۴۷) مثبت صمیع $\frac{۱+ ط}{۲ ط}$ $\frac{۲-۱ طحم لا + ط}{۲ ط}$ کی دریافت کرو

رقم $\frac{۲-۱ طحم لا + ط}{۲ ط}$ دفعہ ۲۴۷ کی طرح پہل سکتی ہے یہر موجب دفعہ

$$\text{کہ مع } ج (ط + مو) + ج (ط + مو) = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ زلا } = \frac{ج (ط + مو) + ج (ط + مو)}{س} \dots$$

$$= \frac{ج (ط + مو)}{س} =$$

اس نتیجہ میں یہ یاد رکھنا چاہی کہ اس چھوٹا واحد سے ہے اور جملہ ج (ط + مو) اور ج (ط + مو)

ضابطہ ٹیلر کے موافق قابلیت پہلنی کی رکھتی ہیں

اسے طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{کہ مع } ج (ط + مو) - ج (ط + مو) = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ کہ } = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ ج (ط + مو) ج (ط + مو)}$$

$$\text{اور کہ مع } ج (ط + مو) + ج (ط + مو) = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ زلا } = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ ج (ط + مو) ج (ط + مو)}$$

$$= \frac{ج (ط + مو)}{س} =$$

مقادیر مستقل کی جگہ خیالی قیمتوں کا اندراج

(۳۰۲) کلیات معلوم سے بعض اوقات کلیات محدود اس طرح بھی متبیط ہو جائیں کہ جو

اونہیں مقادیر مستقل واقع ہوں ان کی جگہ ناممکن قیمتیں درج کریں یہ عمل مدلل نہیں ہے

لیکن وہ بعض صورتیں ایسی ظاہر کرتا ہے جنکا امتحان ہو سکتا ہے اور شاید تدریس کے

سے ثابت بھی ہو سکا (ڈی مورگن کا علم حساب الجبرئیات دیکھو)

اب ہم بعض مثالیں اسکی لکھتی ہیں

$$\text{ہم کو یہ حاصل ہے کہ مع } ج (ط + مو) = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ ج (ط + مو)}$$

$$\text{ج کی جگہ } ط + مو = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ زلا } = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ ج (ط + مو)}$$

$$\text{پس } ج = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ ج (ط + مو)}$$

$$\text{مع } ج (ط + مو) = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ ج (ط + مو)}$$

اب ممکن اور ناممکن حصوں کے جدا کرنے سے

$$\text{مع } ج (ط + مو) = \frac{ج (ط + مو)}{س} \text{ ج (ط + مو)}$$

جمع می ط لا^۱ - اجم من لا زلا = حجم (ن) جب (ن) من (ص) (ص)

اثبات کی ترکیبیں اگر اسکی دیکھنی ہو تو دی مورگن کا علم حساب الجزئیات دیکھو

(۳۰۳) صورت قانونیہ
جمع می ط لا^۲ زلا = $\frac{a_1}{b^2}$

ط کو $\frac{(1-a_1)}{b} + 1$ سے ملو تو

جمع می ط لا^۲ - اجم من لا زلا = $\frac{a_1}{b} \frac{(1-a_1) - 1}{b}$

اسو^۱ جمع [جم من لا - اجم من لا] زلا = $\frac{a_1}{b} \frac{(1-a_1) - 1}{b}$

اسو^۲ جمع جم من لا زلا = $\frac{a_1}{b^2}$

اور جمع جب من لا زلا = $\frac{a_1}{b^2}$

اگر کوں لا کی جگہ لکھیں تو یہ صورتیں ہو جائیگی کہ

جمع جب وزی = جمع جم وزی = $\frac{a_1}{b^2}$

(۳۰۴) کلی جمع می - $(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b})$ زلا من فرض کرو کہ لا ہاں تو کلی یہ ہو جائیگی

۱/ جمع می - $(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b})$ زلا اور یہ بموجب دفعہ ۲۸۴ کے معلوم ہے پس

جمع می - $(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b})$ زلا = $\frac{a_1}{b^2}$ می ط کو

اب جم بر + $(1-a_1)$ جب بر کو بجای ک کے لکھو تو بائیں طرف کا رکن

جم $\frac{a_1}{b} + (1-a_1)$ جب $\frac{a_1}{b}$ می ط کو (جم بر + $(1-a_1)$ جب بر)

یعنی $\frac{a_1}{b}$ [جم (ط جب بر + $\frac{a_1}{b}$) - اجم من لا] جب (ط جب بر + $\frac{a_1}{b}$) می ط کو جم بر

پس جمع می - $(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b})$ جم بر جم [جم بر + $(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b})$ جب بر] زلا

= $\frac{a_1}{b^2}$ می ط کو جم بر جم (ط جب بر + $\frac{a_1}{b}$)

اور جمع می - $(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b})$ جم بر جب [جم بر + $(\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b})$ جب بر] زلا

= $\frac{a_1}{b^2}$ می ط کو جم بر جب (ط جب بر + $\frac{a_1}{b}$)

امثله

(۱) صبیح $\frac{(لا + ط) زلا}{لا + ص + لا + ص}$ کی قیمت کا حساب لگاؤ حاصل $\frac{(ط + ص)}{۳}$ کنہ

(۲) یکہ مع جم (ط مس لا) زلا کی قیمت کا حساب لگاؤ حاصل کچھ می

(۳) بیع لا کنہ می زلا کی قیمت کا حساب لگاؤ حاصل $\frac{۱}{۲}$

(۴) یکہ مع $\frac{(ط جم لا + ص جی لا)}{زلا} = \frac{(ط ص + ط ص)}{کچھ}$

(۵) ثابت کرو کہ کچھ مع ما (مس سر) زسر $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ + لوک $\frac{۱}{۲} [۱ - (۲)]$

(۶) ثابت کرو کہ کچھ مع ما (مس سر) زسر $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ + لوک $\frac{۱}{۲} [۱ + (۲)]$

(۷) لاتی لا بیع می زلا کی قیمت حد بنانی والی جب لا = ص کے ہو دریافت کرو

حاصل $\frac{۱}{۲}$

(۸) ثابت کرو کہ صبیح جم ط لا - جم ص لا = زلا = لوک $\frac{۱}{۲}$

(۹) اگر ح (لا د $\frac{۱}{۲}$) جملہ بالقرنیہ لا اور $\frac{۱}{۲}$ کا ہو تو

صبیح لاج (لا د $\frac{۱}{۲}$) = ۲ = بیع لاج (لا د $\frac{۱}{۲}$) زلا

(۱۰) اگر ح (لا) کثیر الارقام خبر یہ جملہ ن درجہ سے کم درجہ کا ہو تو

صبیح ح (لا) زلا = $\frac{۱}{(۱-س)}$ - $\frac{۱}{(۱-س)}$ ح (س) لوک $\frac{۱}{(۱-س)}$

(۱۱) ثابت کرو کہ یکہ مع جم (جی بر) زیر = ۲ کہ

(۱۲) ثابت کرو کہ یکہ مع $\frac{ما (۱-س)}{س-۱}$ زیر = $\frac{کچھ}{ما (۲)}$ جب س نہ نہایت ہے

تقریباً برابر واحد کے ہو اور ن مثبت مقدار ہے

(۱۳) یکہ مع (ط جم بر + ص جی بر) لوک (ط جم بر + ص جی بر) زیر کی قیمت کا حساب لگاؤ

حاصل $\frac{۱}{۲}$ ص $[لوک ط - ۲ + \frac{۲}{ما (ط ص)} ح $\frac{۱}{ما ط}$]$

ط بڑا ص سے فرض کیا گیا ہے

(۱۴) ثابت کرو کہ

مثلاً

$$\text{صبح لوگ } 2+1 \text{ جم } 2+1 \text{ ن } 2+1 \text{ زلا } = \frac{2+1}{2} \text{ لوگ } (2+1) \text{ لوگ } \frac{2}{2}$$

$$\text{اگر ن چھوٹا واحد سے ہو یا برابر لوگ } (1 + \frac{1}{2}) \text{ لوگ } \frac{2}{2}$$

کے اگر ن بڑا واحد سے ہو

$$(15) \text{ قیمت صبح } (1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10) \text{ کی دریافت کرو}$$

ایمیں ط اور ص مثبت ہیں لیکن سہ اور صہ مثبت ہیں یا منفی ہیں اور ثابت کرو کہ وہ بالکل

$$\text{حقیقی ہونگے اگر } \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

$$(14) \text{ ثابت کرو کہ صبح م } (1 - 2 + 3 - 4) \text{ زلا } = \frac{2}{2} \text{ کہ } - \text{ لوگ } 2$$

$$(14) \text{ ثابت کرو کہ صبح } \frac{2}{2+1} \text{ زلا } \text{ لوگ } (1 + \frac{1}{2}) = \text{ کہ لوگ } 2$$

$$(18) \text{ صبح } \frac{2}{2} \text{ زلا کی قیمت سے}$$

$$\text{صبح } (\frac{2}{2}) \text{ زلا}$$

سے استنباط کرو حاصل دو نو کلیات ایمیں برابر ہیں

$$(14) \text{ ثابت کرو کہ صبح } (\frac{2}{2} - \frac{2}{2}) \text{ زلا } = \text{ لوگ } \frac{(2+2)}{(2+2)} \text{ کہ}$$

$$(20) \text{ ثابت کرو کہ صبح } \frac{2}{2(2+1)} \text{ زلا } = \text{ کہ}$$

$$(21) \text{ ثابت کرو کہ صبح } (\frac{2}{2} - \frac{2}{2}) \text{ زلا } = (2 - 2) \text{ کہ}$$

$$(22) \text{ ثابت کرو کہ صبح لوگ } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} \text{ کہ}$$

$$(23) \text{ ثابت کرو کہ صبح } \frac{2}{2} - \frac{2}{2} = \text{ لوگ } 2 \text{ اور اس مساوات کو}$$

صبح $\frac{2}{2}$ کے ہٹ بدلی ہوئی حاصل سے $\frac{2}{2} = \text{ کہ فرض کر کے تطبیق دو}$

$$(24) \text{ ثابت کرو کہ صبح جب برابر } = \frac{2}{2} \text{ کہ}$$

$$(25) \text{ ثابت کرو کہ صبح } \frac{2}{2} - \frac{2}{2} = \text{ کہ}$$

$$(26) \text{ ثابت کرو کہ صبح جب برابر } = \frac{2}{2} \text{ کہ}$$

$$(27) \text{ ثابت کرو کہ صبح جب برابر } = \frac{2}{2} \text{ کہ}$$

مشکل

۲۵۳

(۲۶) ثابت کرو کہ کچھ جمع $\frac{ص}{ص+بر} + \frac{بر}{ص+بر} = \frac{ص}{ص+بر}$ کہ حجم $\frac{۱}{۲}$ کہ $\frac{ص-۱}{۲}$ کہ $\frac{ص+۱}{۲}$ کہ
فائم بہ نسبت واحد کے ہے

(۲۸) ثابت کرو کہ کچھ جمع $\frac{ص-۱}{ص+۱} = \frac{[جم (۱/۲)]}{جم (۱)}$ کہ $\frac{۱-ص}{۱+ص}$ کہ $\frac{۱-ص}{۱+ص}$ کہ

(۲۹) ثابت کرو کہ کچھ جمع $\frac{ص-۱}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

(۳۰) ثابت کرو کہ کچھ جمع $\frac{ص-۱}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

(۳۱) ثابت کرو کہ کچھ جمع $\frac{ص-۱}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ
اور $\frac{ص}{ص+۱}$ کے قیمتوں کے

(۳۲) مساوات $\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

(۳۳) مساوات $\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

مقام النقطہ مرسوم کرو اور آئین لو = جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

(۳۴) مساوات $\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

آئین جذر المربع کی علامت ہمیشہ ایسی لگاتی ہے جسے کہ نسب نامہ ثابت رہے

(۳۵) ثابت کرو کہ

کچھ جمع $\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

(۳۶) صورت جمع $\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

لیکر حاصل کا آئین مقابلہ کرو

(۳۷) قیمت جمع $\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

جمع $\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

(۳۸) ثابت کرو کہ کچھ جمع $\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ص}{ص+۱}$ کہ جب $\frac{ص}{ص+۱}$ کہ

کلی اون تمام مثبت قیمتوں پر لا اور کی پہلی ہے جو لا + ۱ کو بڑا واحد سے بنا ہے

(۳۹) ثابت کرو کہ

$$\text{مجموع } ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots = \frac{۱}{۲} \text{ جم } \left[\frac{۱}{۱+۱} \right]$$

تعداد مقدار متغیر کی کیا ہی اور کلی اون تمام مثبت قیمتوں پر پہنچتی ہے جو

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$$

کو بڑا واحد سے نہیں کرتے

$$(۷۰) \text{ اگر } ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots = ۱ \text{ ح } (۱)$$

$$(۷۱) ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots = ۱ \text{ ح } (۱)$$

ثابت کرو کہ

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots = ۱$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ کہ } [۱ + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + \dots] [۱ + (۱ - ۱) + (۱ - ۱) + \dots] = ۱$$

آئین لو = لای $\frac{۱}{۲}$ اور مو = لای $\frac{۱}{۲}$

(۷۱) اگر مجموعہ سلسلہ $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ کا صورت متناہی میں بیان ہو
تو مجموعہ سلسلہ $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ کا کلی محدود میں تعبیر ہو سکتا ہے کہ ثابت
کرو اور پھر اسے ثابت کرو کہ صورت مفصلہ $(۱ + ۱)$ کی امثال ارقام کے درجوں

$$\frac{۱}{۲} \text{ مجموعہ جب } ۱ \text{ مثبت صحیح عدد ہو}$$

مجموعہ $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots$ سرجم ۱ برزبر ۱

سے بیان ہو سکتا ہے

$$(۷۲) \text{ ثابت کرو کہ مجموعہ } ۱ + ۱ + ۱ + \dots = \frac{۱}{۲} \text{ کہ } \left[\frac{۱}{۱+۱} + \frac{۱}{۱+۱} + \dots \right]$$

(۷۳) ثابت کرو کہ

$$(۷۴) \text{ ثابت کرو کہ } ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸} + \dots = \frac{۱}{۲}$$

مجموع $(۱ + ۱)$ جم ۱ لازلا = مجموع $(۱ + ۱)$ جم ۱ لازلا

$$= \frac{۱}{۲} \text{ مجموع جم } (۱ + ۱) \text{ زو}$$

(۴۵) ثابت کرو کہ

(۲۵) باب اول
 صمغ لائے صمغ ن - م - ا - ح - ز = صمغ لائے
 دفعہ ۶۶ دیکھو اور مقدار متغیر کو لو سے مدد لوجب کد = لولا

(۴۷) ثابت کیرو کہ

(۷۴) ثابت کردیم
صحتی - (لازم بر + ط^ط واجب بر) جم { لاوجب بر + ط^ط / جم بر } زیرا
که $\frac{1}{\text{ط}}$ صحتی - ط نعم (سر + ط)

برحد و دغائی = کچھ کے درمیان دخل ہے

تیسرا باب

علم مشیخی حملون کا پہلا کتاب

(۵۰) جس مطلب کا اب ہم ذکر کرینگے وہ علم حساب الکلیات کے استعمالات میں نہایت بکار اور عظیم الشان ہے اس اصول کے رسالہ میں وہ سارا تو نہیں بیان ہو سکتا مگر اسکا چربہ اتار دیتے ہیں اور اس چربہ ہی سے طالب علموں کو بڑا فائدہ ہوگا کیونکہ اوسمیں بہت سی نئی نئی ترکیبیں کام میں آتے ہیں اور بڑے بڑے نتیجے پیدا ہوتے ہیں اگر اس مطلب کو پورا پورا دیکھنا منظور ہو تو پیر فیر دی مورگن حسب کے علم حساب الکلیات کے رسالہ کو دیکھو

(۳۰۹) مطلوب یہ ہے کہ مطلقاً مستقلہ لہ و لہم و لہم... لہم کی سی قیمتیں با کریں

قیمت میں مطابق لاکھ جملہ معین کے اور حالت میں ہو کہ لاکھ قیمتیں ہر ۲۰ روپیہ ۳۰ روپیہ ۴۰ روپیہ

اور آئینہ بر = $\frac{1}{m+1}$ ہو

فرض کرو کہ (لا) جملہ معین لاکا ہو تو بموجب فرض کے مساواتیں جنہیں مفاد مسئلہ

در یافت ہونگے یہ حاصل ہونگے

ح (بر) = لجب ۱ بر + لجب ۲ بر + لجب ۳ بر + ... + لجب م بر
 ح (۲) = لجب ۱ بر + لجب ۲ بر + لجب ۳ بر + ... + لجب م بر
 ح (م) = لجب ۱ بر + لجب ۲ بر + لجب ۳ بر + ... + لجب م بر
 ان مساواتوں میں پہلے اول مساوات کو جب لی بر میں اور دوسرے کو جب لی بر ۱۰۰ اور
 آخر مساوات کو جب م لی بر میں ضرب دو اور حاصل کو جمع کرو تو مثال لحو کے دو سر طرف سے لے کر
 جب لی بر جب صو بر + جب ۲ بر + لجب ۱ صو بر + + جب م لی بر جب م صو بر
 اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ یہ مثال صفر ہے اگر صو مختلف لی سے ہو اور برابر لی (م) ہے اگر
 صو برابر لی کے ہو

اول فرض کرو کہ صو مختلف لی سے ہی اب دو چند اد پر کے مثال کا برابر اس سلسلہ کے ہر

جم (لی - صو) بر + جم (لی - صو) بر + + جم (لی - صو) بر
 علم مثلث سے مجموعہ اول سلسلہ کا برابر ہے
 جب (۱ + م) (لی - صو) - جب (لی - صو) بر

۲ جب (لی - صو) بر
 جب (لی - صو) کہ - (لی - صو) بر - جب (لی - صو) بر
 یعنی
 ۲ جب (لی - صو) بر

یہ صورت بیانہ معدوم ہوتی ہی جب لی - صو طاق عدد ہو اور برابر - کے ہر جب لی - صو طاق عدد ہو
 دوسرے سلسلہ کا مجموعہ اول سلسلہ کے مجموعہ سے اس طرح استخراج ہوتا ہے کہ علامت صو کی
 تبدیل کر دے اسے معلوم ہو کہ مجموعہ معدوم اس حالت میں ہو گا کہ لی - صو طاق عدد ہو
 اور - کی برابر اس صورت میں ہوتا ہے کہ لی - صو طاق عدد ہو
 پس صو جب مختلف لی سے تو مثال لحو کے صفر ہیں
 جب صو برابر لی کے ہے تو مثال یہ ہو جائیگی کہ

جیب۱ لی بر + جیب۲ لی بر + ... + جیب۱۰ لی بر

یعنی $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \left[\text{حجم } n^{\text{ویں بر} + \text{حجم } (n-1)^{\text{ویں بر}} + \dots + \text{حجم } 2^{\text{ویں بر}} + \text{حجم } 1^{\text{ویں بر}} \right]$

اب جس ترکیب کو ہم عمل میں لائی تھی اس کے موافق معلوم ہو گا کہ سلسلہ جوب تمام کا مجموعہ ہے۔

اسلٹی ایشال اس کے $\frac{1}{4}$ (م + ۱) امین

اسے یہ حال ہوتا ہے

لکھو = $\frac{2}{1+m}$ [حب لب برح (بر) + حب لب برح (۲بر) + ... + حب لب برح (۴بر)]

بس اسی تک اعداد صحیح میں سو متواتر فی کے نمبین مفر کرنے سے مقدار متغیر شخص موعہ ہیں

اب فرض کرو کہ م غیر محدود زیادہ ہوتا ہے تو ہم آخر کار

لکھو = $\frac{2}{3}$ کیسے حبیبی موج (مو) زمو

اور چونکہ ح (لا) مطابق قیمت میں اس صورت بیانہ

الحب لا + الحب لا + ... کے ہے

اور کہ کے درمیان لاکے غیر متناہی مساوی البعد قیمتوں کے واسطے اس نتیجہ کو لاکے کہ

ج (لا) = $\frac{2}{3}$ صحیح جہن لا کہ مع جہن موفج (موزمو) ہے

اس میں رمز صمغ سے وہ تجلیم مراد ہے جو کچھ سرکیشٹ فہمت کے مقرر کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۳۰۷) دفعہ گذشتہ کا مسئلہ اور اثبات دونوں لاگ انٹر کے ایجاد کئی ہوئی ہیں یہ امر اثبات

کو کچھ نہ اس نظر سے لکھا ہے کہ وہ اس علم کے تاریخ میں دیکھیں مضمون ہی اور کچھ اس سے

کے لئے کہ اس میں جو باتیں ہیں ان سے اس کے حقیقی ہوتے کی تائید ہوتی ہے۔

تدقیق سے لکھنے کے طریقہ تحقیقات پوسٹن کا اختیار کر کے

(۳۰۸) علمِ مثلث کے معمولی طریقہ کے موافق یہ صورت مفصلہ ہو سکتی ہے کہ

$$\frac{(1 - \frac{1}{n})}{(1 - \frac{1}{n})} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}}$$

حصہ چوتھا بہ نسبت واحد کے ہے اسلی سلسلہ الضما می ہے

(۱) کی طرفین کو مج (مو) میں ضرب دو اور لمجاز مو کے کلی حدود غائی۔ ل اور ل کے برابر
بائیں طرف مختلف قواء حصہ کے آخر کو واحد بن جائیگے اور دائیں طرف جو کسرت ہو
شمار کنندہ آخر کو معدوم ہو جائیگا اور اس طرح کلی یہی معدوم ہو جائیگے اگر نسبتا کہی صفر نہ ہو
لیکن اگر لا در میان۔ ل اور ل کے واقع ہو تو رقم جم کے (مو۔ لا) برابر واحد کے

کلی کے اندر ہوگی اور اس طرح نسبت ناما کسر کا (۱۔ حصہ) ہوگا اور صفر کی طرف مائل ہوگا
جب حصہ قریب واحد کے پہونچی گا اسلی کچھ ضرور نہیں کہ کلی معدوم ہو اب ہم اسکی قیمت تحقیق کریں
فرض کرو کہ مو۔ لا = ے اور حصہ = ۱۔ ف تو

$$\text{مع } (۱۔ \text{حصہ}) \text{ مج (مو) زمو} = \frac{\text{مع } (۱ + \text{حصہ}) \text{ مج (لا + ے) زے}}{\text{مع } ۲۔ ۱ \text{ حصہ جم کے (مو۔ لا) + حصہ}} = \frac{\text{مع } ۲ + ۱ \text{ حصہ جب کہ ے}}{\text{ل}}$$

اب کلی کا صرف وہ حصہ باعنی قیمت رکھتا ہے جو ے کے بہت پہونچی مثبت یا منفی قیمتوں
سے پیدا ہوتا ہے پس ہم کہہ سکتے ہیں کہ

$$\text{جب } \frac{\text{کے}}{\text{ل}} = \frac{\text{کے}}{\text{ل}}$$

اور مج (لا + ے) = مج (لا)

اور کلی یہہ ہو جائیگے کہ

$$\text{ف } (۱ + \text{حصہ}) \text{ مج (لا) مع } ۲ = \frac{\text{زے}}{\text{ل}} = \frac{\text{مع } ۲ + ۱ \text{ حصہ کے کے}}{\text{ل}}$$

$$\frac{\text{ل}}{\text{ل}} \text{ مج (لا) مع } ۱ = \frac{\text{مع } ۱ + ۱ \text{ حصہ کے کے}}{\text{ل}}$$

فرض کرو کہ سہ اور۔ حصہ حدود غائی ے کے ہوں تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{ل}}{\text{ل}} \text{ مج (لا) } \left[\text{مع } ۱ + \frac{\text{مع } ۱}{\text{ل}} \right] = \frac{\text{مع } ۱ + ۱ \text{ حصہ کے کے}}{\text{ل}}$$

اسی معلوم ہوا کہ آخر کا جب ف کا معدوم ہونا فرض کیا جائیگا تو ل مج (لا) حاصل ہوگی اگر

لا در میان۔ ل اور ل کے واقع ہو تو

$$\text{مج (لا) } = \frac{\text{ل}}{\text{ل}} \text{ مع مج (لو) زمو} + \frac{\text{ل}}{\text{ل}} \text{ مع مج (مو) جم کے (مو۔ لا) زمو} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}}$$

لیکن اگر لا = ل یا - ل کے تو بائیں طرف کا وہی حصہ یا معنی ہے جو مو کو غیر محدود
 ل اور ل کے قریب ہو پس ہم کو اوپر کا عمل دو صورتوں میں کرتا جا ہی لیکن کلی لحاظ
 سے کے پہلے صورت پر - صہ سے - تک پہنچتی ہی اور دوسری صورت میں سے - تک، ابھی معلوم ہوا
 کہ دائیں طرف ۲ ل مج (ل) کے ل مج (ل) + ل مج (- ل) رکھنا چاہی اور ۱ ل
 بجائی مج (لا) کے دائیں طرف (۲) کے ہم کو

$$\frac{1}{2} \text{ مج (ل) } + \frac{1}{2} \text{ مج (- ل) }$$

رکھنا چاہیے پس اس طرح سی ہم نے قیمت بائیں طرف کے رکن کی جب لا درمیان ل اور ل کے واقع ہو
 تشخیص کریں اور اور صورتوں میں او کی قیمت ۳۲۱ کی طرح تشخیص ہوتی ہے
 (۳۰۹) دفعہ ۳۰۸ میں جس طرح نتیجہ حاصل ہوا ہے اسی طرح اگر - اور ل کے درمیان کلی میں تو
 مج (لا) = $\frac{1}{2}$ ل بمع مج (لو) زمو + $\frac{1}{2}$ ل بمع مج (مو) جم ل کہ (مو - لا) زمو ... (۱)
 یہ نتیجہ مستحکم رہی گا اگر لا کی قیمت - اور ل کے درمیان ہو لیکن جب لا = ل تو دائیں طرف کا رکن
 $\frac{1}{2}$ مج (۰) ہو گا اور جب لا = ل تو دائیں طرف کا رکن $\frac{1}{2}$ مج (ل) ہو گا پس اس طرح
 قیمت بائیں طرف کے رکن کے جب لا درمیان ل اور - ل کے واقع ہو تشخیص کر دی اور
 او کی اور صورتوں میں اس طرح تشخیص ہو گی جس طرح دفعہ ۳۲۱ میں بیان ہوئی
 علیٰ ہذا القیاس

- = $\frac{1}{2}$ ل بمع مج (مو) زمو + $\frac{1}{2}$ ل بمع مج (مو) جم ل کہ (مو + لا) زمو ... (۲)
 یہ نتیجہ لا کی سب قیمتوں کے واسطے ہو۔ اور ل کے درمیان واقع ہو مستحکم رہی اور دائیں طرف
 رکن $\frac{1}{2}$ مج (۰) ہونا چاہیو اور جب لا = ل تو دائیں طرف کا رکن $\frac{1}{2}$ مج (ل) ہونا چاہی
 (۱) اور (۲) کے جمع کرنے سے

مج (لا) = $\frac{1}{2}$ ل بمع مج (لو) زمو + $\frac{1}{2}$ ل بمع مج (لو) جم ل کہ (لو) زمو ... (۳)
 اور ل کے درمیان جو قیمتیں لا کے ہوں ان کے موافق یہ نتیجہ مستحکم رہے

(۱) اور (۲) میں تقریبی کرنے سے

مح (لا) = $\frac{1}{2}$ صحیح جب $\frac{1}{2}$ کہ لا $\frac{1}{2}$ لیس جب $\frac{1}{2}$ کہ مو مح (مو) زمو... (۳)
 اور ل کے درمیان لا کے سببیتوں کے موافق نتیجہ مستحکم ہے اور جب لا = ۰ تو
 دائیں طرف کارکن صخر پڑا چاہے

مساوات (۴) بالکل مطابق لاگر انٹر کے صورت قانونیہ کے ہے

صورت قانونیہ (۳) اور (۴) اور صورتوں سی مستطیل ہو سکتی ہیں فرض کرو کہ ہم (۳)

لین اور جب کہ لا صحیح (لا) کو بجای مح (لا) کے لکھیں تو

جب کہ لا مح (لا) = $\frac{1}{2}$ لیس جب کہ مو مح (مو) زمو

+ $\frac{1}{2}$ صحیح جم $\frac{1}{2}$ کہ لا لیس جم $\frac{1}{2}$ کہ مو جب کہ مو مح (لو) زمو

اب ہم $\frac{1}{2}$ کہ مو جب کہ مو = $\frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$ کہ مو - $\frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$ کہ مو (۱-۱) کہ مو

اسو اصلی بہ دریافت ہو گا کہ نتیجہ کو اس طرح لکھی کر دکھا سکتے ہیں کہ

جب کہ لا مح (لا)

= $\frac{1}{2}$ صحیح [جم (۱-۱) کہ لا - جم (۱+۱) کہ لا] لیس جب کہ مو مح (لو) زمو

اور نیز جم $\frac{1}{2}$ کہ لا - جم (۱+۱) کہ لا = $\frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$ کہ لا جب کہ لا

اور اسو $\frac{1}{2}$ جب کہ لا پر تقسیم کرنے سے ہم صورت قانونیہ (۴) کو حاصل کرینگے

اب ہم بعض مثالیں لکھتی ہیں

(۱۲) لا کو سلسلہ جو ب میں پہلا و صورت قانونیہ (۴) دفعہ ۳۰۹ کی لو اور فرض کرو کہ

ل = کہ تو

مح لا جب ل موز لو = - $\frac{1}{2}$ مو جم ل لو + $\frac{1}{2}$ جب ل مو

اسو $\frac{1}{2}$ کیس مو جب ل موز مو = کہے اگر ل طاق ہو اور - کہے اگر ل جفت ہو

پس

$$لا = ۲ [جب لا - \frac{1}{2} جب ۲ لا + \frac{1}{2} جب ۳ لا - \frac{1}{2} جب ۴ لا + \dots]$$

اور کہ کے درمیان لا کے سب قیمتوں کے موافق یہ نتیجہ مستحکم ہے اور طرفین

لا کے ساتھ محدود ہو جاتی ہیں اس واسطے نتیجہ اس حالت میں بھی مستحکم ہوگا
جس وقت کہ لا = ۰ اور یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر یہ نتیجہ لا کے کسی مثبت قیمت کے موافق مستحکم ہو
تو وہ اس منفی قیمت کے واسطے بھی مستحکم ہوگا جو اس مثبت قیمت کے مناظر ہو
اسی معلوم ہوا کہ کہ اور کہ کے درمیان لا کے سب قیمتوں کے موافق نتیجہ مستحکم ہے اور اس میں

یہ حد بنائی والی قیمتیں بھی خارج ہیں

(۳۱) جیم لا کو سلسلہ جو ب میں پہلاؤ صورت قانونیہ (۴) دفعہ ۳۰۹ لو اور

فرض کرو کہ ل = کہ

$$\text{مع جم موجب ن موزو} = \frac{1}{2} \text{ مع } [جب (۱+ن) مو + جب (۱-ن) مو] \text{ زبو}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{جم } (۱+ن) مو}{۱+ن} + \frac{\text{جم } (۱-ن) مو}{۱-ن} \right]$$

اس واسطے کہ مع جم موجب ن موزو = ۰ اگر ن طاق ہو

$$= \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ اگر ن جفت ہو}$$

اس واسطے

$$\text{جم لا} = \frac{1}{2} \left[\frac{۱}{۱۵} جب ۲ لا + \frac{۱}{۱۵} جب ۳ لا + \dots + \frac{۱}{۱-۱} جب ن لا + \dots \right]$$

لا = ۰ سے لا = کہ تک یہ نتیجہ مستحکم ہے اور یہ حد بنائی والی قیمتیں خارج ہیں

(۳۲) ایک مقدار مستقل کو جو ب کے سلسلہ میں پہلاؤ مقدار مستقل کو س سے تعبیر کرو

تو س کو بجای میج (مو) کے صورت قانونیہ (۴) دفعہ ۳۰۹ میں رکھو اور ل = کہ کے فرض کرو

تو یہ حاصل ہوگا کہ

(۳۱۵) ٹی کو سلسلہ خوب انعام میں پہلاؤ

تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{1}{\text{ٹی}} = \frac{1}{\text{ٹک}} + \frac{\text{ط} + \infty}{\text{جمن کہ ٹی}} - \frac{1}{\text{جمن ٹی}}$$

۰ = ۰ سے ۰ = ۰ تک یہ نتیجہ مستحکم ہے

(۳۱۶) جب ط کو جو ب کے سلسلہ میں پہلاؤ اور ط کو می صحیح عدد نہیں ہے ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{1}{\text{جب ط}} = \frac{1}{\text{جب ط}} - \frac{1}{\text{جب ط}} + \frac{1}{\text{جب ط}} - \dots$$

۰ = ۰ سے ۰ = ۰ تک یہ نتیجہ مستحکم ہی اول حد ثانی والی قیمت داخل اور دوسرے خارج ہے

(۳۱۷) جم ط کو سلسلہ خوب انعام میں بیان کرو اور ط کو می صحیح عدد نہیں ہے

ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{1}{\text{جم ط}} = \frac{1}{\text{جم ط}} - \frac{1}{\text{جم ط}} + \frac{1}{\text{جم ط}} - \dots$$

یہ نتیجہ ۰ = ۰ سے ۰ = ۰ تک مستحکم ہے اور دونو داخل ہیں

(۳۱۸) ٹی - ط کو سلسلہ خوب پہلاؤ

یہاں کیمع (ٹی - ط) جب ٹ موزلو = $\frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}}$ جمن کہ ٹی - ط

$$\frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}} = \frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}} - \frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}} + \frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}} - \dots$$

(۳۱۹) (ٹی - ط) کو سلسلہ خوب انعام میں پہلاؤ

یہاں کیمع (ٹی - ط) + (ٹی - ط) = $\frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}}$ جمن کہ ٹی - ط

$$\frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}} = \frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}} - \frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}} + \frac{1}{\text{ٹی} - \text{ط}} - \dots$$

(۳۲۰) اس بات کو بھی جاننا چاہی کہ جو اوپر صورتوں میں لکھی ہیں او سے اور صورتوں میں لکھی ہیں

کلی یعنی سے ہو سکتا ہے اور علی العموم اس طرح جو سلسلے حاصل ہوتے ہیں وہ جن اصل سلسلوں سے مستنبط ہوتی ہیں ان سے بہت جلد انضمامی ہوتا ہے مثلاً ہم لاکھ کی صورت قانونیہ سلسلہ جو ب میں لوجود دفعہ ۱۱ لکھی ہے اور کلی لوتو

کچھ جب لا = مقدار مستقل - $\frac{جم ۱۲}{۳ \times ۱}$ - $\frac{جم ۱۶}{۵ \times ۳}$ - $\frac{جم ۱۴}{۶ \times ۵}$ - ...
 لا = کے رکھتی سے مقدار مستقل $\frac{۱}{۲}$ معلوم ہوگی یہ نتیجہ مطابق اس نتیجہ کے ہے جو جب لا کو سلسلہ حوب النمام میں پہلانے سے حاصل ہوتا

(۳۲۱) ہم اوپر ثابت کر چکے ہیں کہ دفعہ ۹. ۳ کی صورت قانونیہ (۳) اور صبیحہ لون پر حاوی چھ لاکھ۔ اور ل کے قیمتوں کے درمیان کی جائیں اور۔ اور خود ہی اصل میں تولد اس بات کا دریافت کر لینا کچھ مشکل نہیں کہ بائیں طرف کارکن ان لاکھ کے حدود غائی ہی پر کسلی برابر ہوئے، فرض کرو کہ لا مثبت ہی اور ل اور ۲ کے درمیان واقع ہی اور

لا = ۲ - لا ایسا رکھو کہ لا چھوٹا یہ نسبت ل کے ہو تو

$$جم \frac{ن}{ل} کہ لا = جم (۲ کہ - \frac{ن}{ل} کہ لا) = م \frac{ن}{ل} کہ لا$$

اسو اٹھ قیمت بائیں طرف کے رکن کی جج (لا) ہی دوم فرض کرو کہ لا بڑا یہ نسبت ل کے ہے اور وہ برابر ۲ م لا + لا کے ہے جس میں لا چھوٹا ۲ ل سے ہے تو

$$حم \frac{ن}{ل} کہ لا = حم \frac{ن}{ل} کہ لا$$

پس قیمت دی ہی گویا کہ لا کو بجای لا کے رکھا ہی نہ تھا یعنی قیمت جج (لا) ہی اگر لا چھوٹا ل سے ہو اور جج (۲ - لا) ہے اگر لا بڑا ل سے ہو

یہہ ظاہر ہے کہ لا کے بر مبنی قیمت کے موافق دی قیمت ہی گی جو اس کی نظر کی قیمت کے واسطی ہے اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر لا مثبت ہو اور ۲ م ل + لا تو قیمت بائیں طرف

(۴) دفعہ ۹. ۳ کی وہی ہی جو لا کو بجای لا کے رکھتی سے حاصل ہوتی اور جج (لا) ہی اگر لا چھوٹا ل سے ہو اور جج (۲ - لا) ہی اگر لا بڑا ل سے ہو اور لا کے بر مبنی قیمت

کے موافق وہی قیمت ہی جو عددی قیمت اور اسکی نظیر کی مثبت قیمت ہی مگر علامت بدلی ہوگی
(۳۲۲) اس بات پر بھی دھیان کرنا چاہی کہ دفعہ ۳۰۸ کے اصولی استدلال میں ہم نے یہ
فرض کیا ہے کہ جب صد اپنی حد فاضلی واحد پر پہنچتا ہے تو صورت بیانہ
مع $\frac{1}{2}$ ج (مو) جم $\frac{1}{2}$ کہ (مو-لا) زمو

قائم مقام

مع ج (مو) جم $\frac{1}{2}$ کہ (مو-لا) زمو

کا ہو سکتا ہے خواہ ن کتنا ہی بڑا ہو اب ہم یہ ثابت کر کے کہ دوسری کلی جب ن غیر عدد
زیادہ ہو معدوم ہوتا ہے یہ بتا سکیں گے کہ اوپر جو بات فرض کی ہے اسی کوئی غلطی نہیں پیدا ہو
ہو گی یہ حال ہے کہ

مع ج (مو) جم $\frac{1}{2}$ کہ (مو-لا) زمو = $\frac{1}{2}$ ج (مو) جب $\frac{1}{2}$ کہ (مو-لا)

— $\frac{1}{2}$ مع ج (مو) جب $\frac{1}{2}$ کہ (مو-لا) زمو

اسی ثابت ہوتا ہے کہ دائیں طرف کی کلی معدوم ہوتی ہی جب ن غیر متناہی ہو اور قاعدہ
مع (مو) غیر متناہی نہ ہو

(۳۲۳) دفعہ ۳۰۵ کی صورت قانونیہ (۳) اور (۴) سے متعلق بڑی بڑی باتیں اب تک ہم نہیں بیان کیں
ان صورت قانونیہ میں کچھ ضرور نہیں ہی کہ مع (لا) پوینستہ جملہ مثلاً لا = س لا = ط تک یہ حاصل ہو سکتا ہے کہ
مع (لا) = ج (لا) تو لا = ط سے لا = س تک یہ حاصل ہو سکتا ہے کہ
مع (لا) = ج (لا) تو لا = س سے لا = س تک یہ حاصل ہو سکتا ہے کہ
مع (لا) = ج (لا) تو لا = س سے لا = س تک یہ حاصل ہو سکتا ہے کہ
مع (لا) = ج (لا) تو لا = س سے لا = س تک یہ حاصل ہو سکتا ہے کہ
مع (لا) = ج (لا) تو لا = س سے لا = س تک یہ حاصل ہو سکتا ہے کہ

مثلاً لاکے تمام قیمتوں کے واسطے جو اور ل کے درمیان واقع ہوں اور جن میں اور ل ہی
داخل ہوں صورت قانونیہ (۳) پر ہی صادق آتی ہے اگر وہ قیمتیں مستثنیٰ ہیں جن کی پرستی میں

کے اندر گنگو واقع ہوئی ہیں مثلاً لا = ط تو قیمت بائیں طرف کے رک کی
 ح (ط) یا ح (ط) نہیں ہوگی بلکہ $\frac{1}{2}$ [ح (ط) + ح (ط)] ہوگی اس واسطے اگر
 لا = ط کے جگہ ح (لا) = ح (لا) رکھیں تو صورت قانونیہ اوس حالت میں
 بھی مستحکم ہوگی جب کہ لا = ط

بعض مضائقے دفعہ ۳۰۴ کی صورت قانونیہ (۳) کی بیان کرنے کا ایک اور طریقہ اختیار کیا
 جسے توجہ مکان گنگو کی طرف ہوتی ہی دائیں طرف میں بجائی چ (لا) کے
 $\frac{1}{2}$ [ح (لا + بد) + ح (لا + بد)] رکھتی ہیں اس میں بدی غیر محدود چھوٹی نسبت مقدار
 کو تعبیر کرتی ہے پس جب گنگو نہیں ہوتی تو حد غائی چ (لا + بد) کی چ (لا) ہوتی ہے
 اور نیز ایسی ہی حد غائی چ (لا + بد) ہے لیکن فرض کرو کہ جب لا = ط ہو تو وہی گنگو واقع
 ہوتی ہی جو ابھی اوپر بیان ہوئی تو حد غائی چ (ط + بد) کی ح (لا) ہے

(۳۲۴) ایسی صورت بیان نہ حاصل کرو کہ جو برابر میں کے اوس حالت میں ہو کہ لا در میان
 اور ط کے واقع ہو اور برابر صفر کے اوس حال میں ہو کہ لا در میان ط اور ن کے واقع ہو
 صورت قانونیہ (۳) دفعہ ۳۰۴ کی ہو یہاں مو = . سے مو = ط تک

چ (مو) = س اور مو = ط سے مو = ل تک وہ صفر ہے پس
 لبعجم $\frac{ن}{ن}$ کہ مو = چ (مو) زمو کی صورت یہ ہو جائیگی کہ
 س طبعجم $\frac{ن}{ن}$ کہ مو = زمو = $\frac{ن}{ن}$ کہ جب $\frac{ن}{ن}$ تک

اس واسطے صورت بیان نہ مطلوب

$\frac{ن}{ن} + \frac{ن}{ن}$ [جب $\frac{ن}{ن}$ جم کہ $\frac{ن}{ن}$ + $\frac{ن}{ن}$ جب $\frac{ن}{ن}$ جم کہ $\frac{ن}{ن}$ + ...]

اسے $\frac{ن}{ن}$ معلوم جب ہو گا کہ لا = ط

یا دفعہ ۳۰۴ کے صورت قانونیہ (۴) کو اس طرح کام میں لائیں کہ

طبع جب $\frac{1}{n}$ کے زمو = $\frac{1}{n}$ (۱- جم $\frac{1}{n}$ کے)

پس صورت بیانہ مطلوب یہ حاصل ہوگی کہ

$$\frac{1}{n} = \left[\text{جم } \frac{1}{n} \text{ جب } \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ جم } \frac{1}{n} \text{ جب } \frac{1}{n} + \dots \right]$$

اسی صفر حاصل ہوتا ہے جسوقت کہ $\frac{1}{n} = 0$ اور $\frac{1}{n}$ اس حاصل ہوتا ہے جبکہ $\frac{1}{n} = 0$

(۳۲۵) اسی صورت بیانہ دریافت کرو کہ $\frac{1}{n} = 0$ سے $\frac{1}{n} = 1$ تک وہ برابر کے ہوں

اور $\frac{1}{n} = 1$ سے $\frac{1}{n} = 0$ تک برابر کے (۱- $\frac{1}{n}$) کے ہوں یہاں

لے مع $\frac{1}{n}$ (مو) جم $\frac{1}{n}$ کے زمو = $\frac{1}{n}$ مع $\frac{1}{n}$ کے زمو + $\frac{1}{n}$ مع $\frac{1}{n}$ کے (۱- مو) جم $\frac{1}{n}$ کے زمو

$$= \left[\frac{1}{n} \text{ جب } \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ جم } \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \text{ کے } \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ کے } \frac{1}{n} \text{ (جب } \frac{1}{n} \text{ کے جب } \frac{1}{n} \text{ کے)} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{n} \text{ جب } \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \text{ جب } \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ کے } \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \text{ کے } \frac{1}{n} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{n} \text{ کے } \frac{1}{n} \text{ جم } \frac{1}{n} - \text{جم } \frac{1}{n} \text{ کے } \frac{1}{n} \right]$$

یعنی $\frac{1}{n}$ جب $\frac{1}{n}$ کی صورت ۲+ ہو اور ہر یک اور صورت میں - ہے اور

لے مع $\frac{1}{n}$ (مو) زمو = $\frac{1}{n}$ مع $\frac{1}{n}$ کے زمو + $\frac{1}{n}$ مع $\frac{1}{n}$ کے (۱- مو) زمو = $\frac{1}{n}$ کے

پس صورت بیانہ مطلوب

$$= \left[\frac{1}{n} \text{ کے } \frac{1}{n} \text{ جم } \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ جم } \frac{1}{n} + \dots \right]$$

اگر ہم اسکو سے تعبیر کریں تو $\frac{1}{n} = 0$ سے $\frac{1}{n} = 1$ تک جس میں یہ خود دو نو بی شکل ہیں

$\frac{1}{n} = 0$ اور $\frac{1}{n} = 1$ سے $\frac{1}{n} = 1$ تک جس میں یہ خود دو نو بی شکل ہیں

$\frac{1}{n} = 0$ (۱- $\frac{1}{n}$) جو قیمتیں $\frac{1}{n}$ کے سے بڑھتی ہیں اور $\frac{1}{n}$ کے قیمتیں $\frac{1}{n}$ کے

ہوئیں جو دفعہ ۳۲۱ میں بیان ہوئیں پس قیمت $\frac{1}{n}$ کی اس شکل کا معنی یہ ہے کہ

طو لو کے محور لاپر دائیں بائیں طرف ناپے جاتے ہیں اور جو قاعدہ اس طرح حاصل ہو

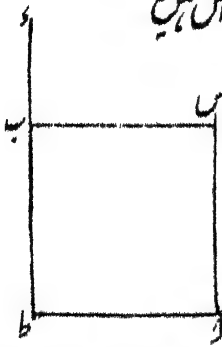
اوپر ایک ہی شدت متساوی اس افق کے بنانے سے پیدا ہوتی ہے

ایک اور مثال یہ ہے کہ ارقام جو ب میں جملہ مچ (لا) ایسا دریافت کرو
 جو برابر لاکے = سے لا = سہ تک ہو اور یہ برابر سہ کی لا = سہ کی لا = کہ سہ تک ہو
 اور یہ برابر کہ - لاکے لا = کہ - سہ سے لا = کہ تک ہو
 حاصل یہ ہے کہ

$$\text{مچ (لا)} = \frac{1}{2} \left[\text{جب سہ جب لا} + \frac{1}{3} \text{جب ۳ سہ جب ۳ لا} + \frac{1}{4} \text{جب ۵ سہ جب ۵ لا} + \dots \right]$$

لا = ۰ سے لا = کہ تک یہ صحیح ہے آہن ۰ اور کہ بھی داخل ہیں

اس نتیجہ کے معنی علم ہند سہ کے موافق بیان کرتے ہیں



فرض کرو کہ ط اس ب ایک یلے ایسا ہو کہ

ط لا = کہ اور ط ب = کہ میدو ط کو

اور ط لا کو محور لا کا اور ط ب کو محور کا

اور محور سے کو زاویہ قائمہ بناتا ہو محور لا اور یہ مقرر کرو اگر ایک مخروط بنا یا جائے

جس کا قاعدہ ط لا س ب ہو اور اس کا اس نقطہ لا = کہ اور = کہ اور = کہ کہ ہو

تو ذیل کی مساوات سے مخروط کے وہ چاروں رخ تعبیر ہونگے جو اس پر ملتی ہیں

$$\text{سے } \frac{1}{2} \left[\text{جب لا جب ۵} + \frac{1}{3} \text{جب ۳ لا جب ۳ ۵} + \frac{1}{4} \text{جب ۵ لا جب ۵ ۵} + \dots \right]$$

طالب علم ان مثالوں کو ثابت کریں کہ

اگر لا تعداد اچھو ط لا سے ہو تو صورت بیان یہ کہ

$$\frac{\frac{1}{2} \left[\text{جم (۱+۱) کے } \frac{۱}{۲} \right]}{\frac{۱}{۲} + ۱} \text{ مچ } \frac{۱}{۲}$$

برابر ط - لا کے اگر لا مثبت ہو اور ط + لا کے اگر لا منفی ہو

ثابت کرو کہ لا کی قیمتیں جو درمیان - کہ اور کہ کے واقع ہوں اور کہ اور - کہ یہی دخلی ہو

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \dots$$

یہ دفعہ ۳۱۰ سے کلی کے یعنی سے حاصل ہو سکتا ہے ہر دفعہ ۳۰ کی مساوات (۳) سے

اس نتیجہ کی کلی لوتو

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{12} = - \text{جب } 12 + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \dots$$

جب کی ارقام میں صورت بیانید دریافت کرو جو برابر جب کے لاء = سہ لاء = سہ تک
اور برابر کی لاء = سہ سے لاء = کہ تک ہو حاصل یہ ہے کہ

۴ سہ $\left[\text{جب سہ جب } 12 + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \dots \right]$
ارقام جو انعام میں صورت بیانید اسی دریافت کرو کہ وہ برابر کے لاء کی لاء = سہ لاء = کہ
تک ہو اور برابر کی لاء = کہ سے لاء = کہ تک ہو نتیجہ یہ ہے کہ

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \left[\text{جب } 12 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \dots \right] + \left[\text{جب } 12 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \dots \right]$$

(۳۲۹) دفعہ ۳۰۹ کے متعلق اوصو قانونیہ ہی لک سکتی ہیں انہیں بعض کی تحقیقات ہم
بیان کرتے ہیں دفعہ ۳۰۹ سے ہم کو یہ حال ہے کہ

مچ (۱) = $\frac{1}{12}$ ل بمع مچ (مو) زمو + $\frac{1}{12}$ ل بمع مچ (مو) جم ل کہ (مو-لا) زمو۔۔۔ (۱)
یہاں سب حالتوں میں مستحکم ہی جنہیں لاء کی قیمت اور ل کے درمیان واقع ہو لیکن جب لاء =

تو دائیں طرف کارکن مچ (۰) ہو جائیگا اور جب لاء = ل تو دائیں طرف کارکن مچ (ل)
ہو جائیگا اور سطح یہ نتیجہ حاصل کیا ہے اس طرح ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ

۲ مچ (۱) = $\frac{1}{12}$ ل بمع مچ (مو) زمو + $\frac{1}{12}$ ل بمع مچ (مو) جم ل کہ (مو-لا) زمو۔۔۔ (۲)
اور ل کے درمیان کوئی قیمت لاء کے واقع ہو اور سب کے لئی یہ نتیجہ مستحکم لیکن جب لاء =

تو دائیں طرف کارکن مچ (ن) ہو جائیگا اور جب لاء = ل تو دائیں طرف کارکن مچ (ل) ہو جائیگا
(۱) کو (۲) سے تفریق کرو تو

$$\text{مچ (۱)} = \frac{1}{12} \text{ ل بمع مچ (مو) جم ل کہ (مو-لا) زمو۔۔۔ (۳)}$$

یہ مستحکم اور سب حالتوں میں مستحکم لاء کوئی قیمت اور ل کے درمیان رکھتا ہے لیکن جب لاء =

اندازہ کیا جائی اور نقطہ سطح پرق نصف قطر انخا ہوا اور اس نقطہ کے نظیر کے نقطہ کا نصف قطر انخا ق ہو اور دوسرے نصف کا نصف قطر انخا ہو ق ہو اور تیسرے نصف کا نصف قطر انخا ق ہو اور علیٰ ہذا القیاس اصلی خط منحنی کے اور نقطہ کے عمود المماس کے ساتھ جو میلان ق وق ہو ق ہو کا ہو گا او سکویہ بر تعیر کر لگا اور خط منحنی کے نقطہ ب کے عمود المماس کے ساتھ جو میلان ق وق ہو ق ہو کا ہو گا او سکویہ بر تعیر کر لگا اور سوا ازین جب بر = ۰ تو ق اور ق ہو اور ق ہو ... معدوم ہوتے ہیں اور جب بر = کچھ تو

بر ہو بر ہو و بر ہو ... وغیرہ معدوم ہونے ہیں

اب ق = نصف اور ق = صو پس ق = مجموع ق زبر

علیٰ ہذا القیاس ق ہو = مجموع ق زبر

ق ہو = مجموع ق زبر

ق ہو = مجموع ق زبر

اور علیٰ ہذا القیاس

اب صورت قانونیہ (۵) دفعہ گذشتہ میں فرض کہ ل = کچھ تو اس سے یہ کہ ق کوئی جملہ ہو گا ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$ق = ل + جم بر + لجم ۳ بر + لجم ۵ بر + ...$$

اس میں ل و لجم و لجم ... خاص مقادیر مستقلہ میں جو صورت قانونیہ (۵) تشخیص ہو رہی ہیں

$$ق = ل + جم بر + لجم ۳ بر + لجم ۵ بر + ...$$

$$ق = ل + جم بر + لجم ۳ بر + لجم ۵ بر + ...$$

$$ق = ل + جم بر + لجم ۳ بر + لجم ۵ بر + ...$$

اس طرح عمل کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ جب ن غیر متناہی بڑا ہو تو

$$ق = ل + جم بر یا ق = ل + جم بر$$

اور ان مساواتوں سے خط تدویر تعمیر ہوتا ہے دفعہ ۱۰۵ دیکھو
اب ہم نتیجہ کی صفت ذاتی کا امتحان اور حالت میں کرتے ہیں کہ اصل خط منحنی کے اطراف سے
محاسن لگائے گئی ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ پر میلان نہیں رکھتی فرض کرو کہ یہ محاسن
زاویہ ۳۰ پر میلان رکھتے ہوں اور ل کے جگہ سے کو صورت قانونیہ (۵) دفعہ گذشتہ میں
تو یہ حاصل ہوگا کہ

$$Q = 1 \text{ جم} \frac{1}{2} + 1 \text{ جم} \frac{3}{2} + 1 \text{ جم} \frac{5}{2} + \dots$$

اور اسی طرح عمل کرنے سے موافق سابق کے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$Q = K \text{ جم} \frac{1}{2} \text{ یا } Q = K \text{ جب } K \text{ کیسے}$$

$$K = 1 \text{ (۲۷۲)}$$

اگر ک ایک مقدار تنہا ہی ہو تو اگر سے بڑا کپ سے ہوگا تو خط تدویر خارجی حاصل ہوگا
اور اگر سے چھوٹا کپ سے ہوگا تو تدویر داخلی حاصل ہوگا جنہیں قطر دائرہ متحرک کا
چھوٹا نصف قطر دائرہ ساکن سے ہوگا دفعات ۱۱۰ اور ۱۱۱ دیکھو اور ہم ایک
معمولی بیان نتائج کا ہے اس باب پر یہی خیال کرنا چاہی کہ ک غیر محدود بڑا اول
صورت میں اور غیر محدود چھوٹا دوسری صورت میں ہوگا

پس اول صورت میں نصف قطر دائرہ ساکن اور متحرک غیر محدود زیادہ ہوتی
ہوئی فرض کی گئی ہیں اور دوسری صورت میں غیر محدود کم ہوتی ہوئے
(۳۲۸) فرض کرو کہ ط اور ص - ط مثبت مقادیر ہوں

$$\text{کلی ثناء } \sum \text{ ط } = \text{جم لوموزو (مو) جم لوموزو}$$

کلی بالا جزا سے ہم کو یہ حاصل

$$\sum \text{ ط } = \text{جم لوموزو} = \frac{\sum \text{ ط } (مو) \text{ جب لوموزو}}{\text{لو}} = \frac{\sum \text{ ط } (مو) \text{ جب لوموزو}}{\text{لو}}$$

اسو اسے

ص م ج (مو) جم لومو مو = م ج (س) حب لومو - م ج (ط) حب لوط زلو

لو
ص م ج (مو) حب لومو زلو
- ص م ج (ط) حب لوط زلو

بس کلی ثناتہ کی صورت یہ ہو جائے گی

م ج (س) ص م ج جم لولاجب لوص زلو - م ج (ط) ص م ج جم لولاجب لوط زلو

- ص م ج ص م ج جم لولاج (مو) حب لولاج زلو

اول اور دوسری رقم سانی سی بدو جب دفعہ ۲۸۵ کو دریافت ہو سکتی ہیں اور تیسری رقم میں تیر
کلی کو بدل دیں اور دفعہ ۲۸۵ کو کام میں لاکر لکھا ط لو کے کلی نکال کر حاصل حاصل کریں
تو نیا ج ذیل حاصل ہونگے

اول فرض کرو کہ لاٹراص ہے تو تینوں کلیوں میں سے ہر ایک معدوم ہو جائے گی
دوم فرض کرو کہ ط اور ص کے درمیان لا واقع ہوتا، تو اول رقم کے م ج (ص) کی برابر ہو اور دوسری رقم کے م ج (ط) کی برابر ہوگی
ص م ج جم لولاجب لومو زلو

برابر کے کی موافق ہوگی اور تمام قیمتوں کے ہوگی جو بڑی لا سے ہیں اور برابر صفر کے
موافق ہوگی اور قیمتوں کے ہوگی بس م ج (س) میں ضرب دیں اور
مو کے کلی لین تو یہ حاصل ہوگا کہ

کے م ج (ص) - کے م ج (ط) (لا)

بس یہ حاصل ہوگا کہ

کے م ج (ص) - [کے م ج (ص) - کے م ج (ط) (لا)]

یعنی کے م ج (لا) قیمت اصل کلی ثناتہ کی ہے
سوم فرض کرو کہ لا چوٹا سے ہے تو اول رقم کے م ج (ص) اور دوسری رقم کے م ج (ط)
اور تیسری رقم کے م ج (س) - م ج (ط) [تو یہ حاصل ہوگا کہ

کے م ج (ص) - کے م ج (ط) - کے م ج (ط) - م ج (ط) (لا)]

یعنی صفر پہلی منشا کی قیمت ہے

اسی معلوم ہوا کہ اگر کوئی منشا برابر کہے جب لا حدود غائی ط اور ص کے پرے واقع ہوتا ہے

اور برابر کہے (لا) کے ہے جب لا حدود غائی ط اور ص سے اندر واقع ہوتا ہے

بہرہ ہی قیاس ہو سکتا ہے کہ اگر لا = ط تو قیمت کہے (ط) ہو اور اگر لا = ص تو قیمت کہے (ص) ہو

اور یہ قیاس اسانی سے ثابت ہوتا ہے

(۳۲۹) فرض کرو کہ صدہ صدہ فی تعدادیر ہوں اور صدہ - صدہ ثابت ہو تو یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

جمع جمع جم لولاج (مو) جم لوموز لوزمو

برابر کے ہے اگر لا حدود غائی صدہ صدہ سے پرے واقع ہے اور برابر کہے (لا) کے ہے

اگر لا حدود غائی صدہ صدہ کے اندر واقع ہو یہ نتیجہ اس طرح ہی حاصل ہو سکتی ہیں اس طرح

دفعہ ۳۲۸ کے نتیجہ حاصل ہوئی تھی یا وہ دفعہ ۳۲۸ کے نتیجہ سے اس طرح مستنبط ہو سکتی ہیں کہ

لا = لا اور مو = - نو کے رکھیں

(۳۳۰) دفعات ۳۲۸ و ۳۲۹ کے نتیجہ کو مرکب کرنے سے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ اگر ع - ق ثابت ہو تو

جمع جمع جم لولاج (مو) جم لوموز لوزمو

برابر کے اگر لا پرے اور برابر کہے (لا) کے اگر لا درمیان حدود غائی ع اور ق

کے واقع ہو اور حدود غائی پر برابر کہے (ع) اور کہے (ق) کے

اور جس طرح یہ نتیجہ حاصل ہوئی ہیں اس طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ یہی پایا گیا

جمع جمع جب لولاج (مو) جب لوموز لوزمو

کے مستحکم دستوار ہیں

(۳۳۱) دفعہ ۳۳۰ میں جو دو نتائج لکھے ہیں ان کے جمع کرنے سے یہ نتیجہ حاصل کرنے میں کہ اگر

جمع جمع جم لولاج (مو) جم لوموز لوزمو

برابر کے اگر لا پرے اور برابر کہے (لا) کے اگر لا درمیان حدود غائی ع اور ق

ثابت ہو

کے واقع ہو اور حدود غائی پر برابر $\frac{1}{2}$ مع (ع) اور $\frac{1}{2}$ مع (ق) کے ہے جس نتیجہ کا بیان اوپر ہوا ہے اوسکا نام فوریر کا مسئلہ ہے لیکن اکثر اوصورت پر اس نام اطلاق کرتے ہیں جس میں ق = - ۵۵ اور ع = ۵۵ پس لاکے ہر تینا ہی قیمت کیونکہ ہم کو یہ معلوم

مع (لا) = $\frac{1}{2}$ جمع ۵۵ مع ۵۵ (مو) جم لو (مو-لا) زلو زمو
(۳۳۲) پوسن نے دفعہ ۳۳۱ کے آخر نتیجہ کا اثبات لکھا، اوسکو ہم دوبارہ زندہ کر

ہیں یہ صورت قانونیہ لو کہ

مع (لا) = $\frac{1}{2}$ - ل مع مع (مو) زمو + $\frac{1}{2}$ - ل مع جم ل مع ل (مو-لا) مع (مو) زمو
کے = ۵۵ اور ل کے = ن ۵۵ = لو کے رکھو تو یہ حاصل ہوگا کہ

مع (لا) = $\frac{1}{2}$ - ل مع مع (مو) زمو + $\frac{1}{2}$ - ل مع جم ل مع ل (مو-لا) مع (مو) زمو
لو ضاعت ۵۵ کا ہے اور مجموعہ جو مع سے تعبیر ہوتا، وہ لو کے تمام قیمتوں پر ۵۵ سے تک پہنچتا ہے لیکن اگر ل غیر محدود زیادہ ہو تو کوئی پتہ تو اس قیمتوں کا تفاوت ۵۵ غیر محدود چھوٹا ہوتا ہے اور مجموعہ جو مع سے تعبیر ہوا ہی ایک کلی ہوجاتی ہے جو بلحاظ لو کے = ۵۵ سے

لو = ۵۵ تک بچا پس اگر ل = ۵۵ کے بنائیں اور زلو کو بچا ۵۵ کے رکھیں اور

معت کلی کی بجائے مع کے رکھیں اور مع (مو) کو ایسا فرض کریں کہ $\frac{1}{2}$ - ل مع مع (مو) زمو

معدوم $\frac{1}{2}$ کے ساتھ ہو تو یہ حاصل ہوگا کہ

مع (لا) = $\frac{1}{2}$ - ل مع ۵۵ مع جم لو (مو-لا) مع (مو) زلو زمو

امثلہ متفرقہ

(۱) صورت بیانیہ طبع $\frac{1}{2}$ مع $\frac{1}{2}$ (لاوی) زلا زوی میں ترتیب کے کو بدل لو

(۲) صورت بیانیہ طبع $\frac{1}{2}$ مع $\frac{1}{2}$ (لاوی) زلا زوی

(۱۲) ایک خط سخی (و چند انجاء کا محور لاکے کرو چکر لگانا ہی تو ثابت کرو کہ سطح مستدیر چوایہ پدید آئے
 = ۲ مع (۱۷ زء + سے زے) + ۲ (۱۷ + سے) (زلا)

چودھواں باب

اوسط قیمت اور ختمالات میں علم حساب الکلیات کا استعمال

(۳۳۳) یہاں چند مثالیں ایسی لکھتی ہیں کہ جنہیں معلوم ہو گا کہ علم حساب الکلیات کا استعمال اوسط
 قیمت اور ختمالات میں کس طرح ہوتا ہے

فرض کرو کہ مچ (لا) جملہ لاکو تعبیر کرتا ہے اور لامتناہی برابر طوط + صدو ط + صدو ط + صدو ط + ... + (۱-ن) + ...
 مچ (ط) + مچ (ط + صدو) + مچ (ط + صدو + صدو) + ... + مچ (ط + (۱-ن) + صدو)

اوسط قیمت اون قیمتوں کا کہتی ہیں جو مچ (لا) کے قیمتیں لاکے قیمتوں سے پیدا ہوں

فرض کرو کہ ص - ط = ن صدو تو اوپر کی اوسط قیمت کو اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ
 مچ (ط) + مچ (ط + صدو) + ... + مچ (ط + (۱-ن) + صدو)

فرض کرو کہ ط اور ص قائم دین یا نہیں کیے تغیر نہ ہو اور ان غیر محدود زیادہ ہو
 تو اوپر کی صورت بیانہ کی حد غائی بہم ہوگی کہ
 مچ (لا) زلا

پس یہی تغیر نہ بہم ہے کہ وہ اوسط قیمت مچ (لا) کی جب ہے کہ لامتناہی تو اوپر کی
 (۳۳۴) یہ سوال ایک مثال اوپر کی دفعہ کی ہے کہ دائرہ کے محیط پر ایک نقطہ معین ہے
 اس سے دائرہ کے اندر جو تمام نقطہ فاصلے رکھتی ہیں ان کا اوسط دریافت کرو

اس بیان دعویٰ مطلب یہ ہے کہ عمل خیل کریں فرض کرو کہ دائرہ کا رقبہ بہت سے برابر
 چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم ہو اور ایک کسر نیا و جسکا شمار کنندہ مجموعہ ان رقبوں کے
 الباقی کا نقطہ ص محیط سے ہو اور تب نماں ہو تو حد غائی اس کسر کی جب غیر محدود ہو اور دائرہ
 فرض کرو کہ ن ویں ... جدا جدا چھوٹے چھوٹے رقبوں کے فاصلوں کو تعبیر کرتا ہے

تو اگر مطلوب یہ ہوگی کہ

$$\frac{1}{2} [(100 + 100 + 100 + 100)]$$

نسب نامہ اور شمار کنندہ دونوں کی اسی طرح میں ضرب دو جو جو یہ واقعہ ہوگا

$$\frac{1}{2} [(100 + 100 + 100 + 100)]$$

معدائی نسبت نامہ کی دائرہ کی رقبہ کو نیز کر دیا یعنی اگر اس نصف قطر دائرہ ہو تو وہ کہ میں ہوگی اور معدائی شمار کنندہ کی موجودہ تعریفات علم حساب الکایات مع مع ان زیر بنی عدد تعائی ایسی کی گئی ہیں کہ ان میں وہ تمام اجزاء ترکیبی رقبہ کہ ہیں جو دائرہ کے اندر واقع ہوتی ہیں پس حاصل یہ ہے کہ

$$\frac{1}{2} [(100 + 100 + 100 + 100)]$$

کہ

اور اسی ۳۲ س حاصل ہوگا

(۳۳۵) مساوات خط منحنی کی بق = س جب برجم برتو اوسط طول تمام اولیٰ نصف قطار کا دریافت کرو جو اول ربع میں برابر یوں قوسی پر کھینچی جائیں

آخر دفعہ کی ترکیب کے موافق باسانی یہ دریافت ہوتا ہے کہ اوسط طول

$$\frac{1}{2} [(100 + 100 + 100 + 100)]$$

پھر فرض کرو کہ اس خط منحنی کا حصہ جو اول ربع میں واقع ہو خط ابتدائی گرد چکر لگائے اور اس طرح ایک سطح مستدیر پیدا کریں فرض کرو کہ نصف قطار دائرہ مبدیہ مختلف نقطہ سطح مستدیر پر تمام سمتوں میں ہوا کر کھینچی جائیں اب مطلوب یہ ہے کہ نصف قطار دائرہ کا اوسط طول دریافت کریں

اس سوال میں بڑی مشکل بات یہ ہے کہ اوس فقرہ کے معنی سمجھیں جو خط منحنی کی لکھا ہوا ہے کہہ کے سطح مستدیر خیال کرو جس کا مبدیہ مرکز ہو تو نصف قطار دائرہ کی ہوا تو ہی

تقسیم سے مراد باری بہہ کر وہ اس طرح لکھی گئی ہیں کہ تعداد اولی جو کسی حصہ سطح مستدیر کے
برمودہ گشتا سیاہ وں حصہ کے رقبہ کے جواب کر جبکہ نصف قطر ہو اس کے سطح مستدیر
کے کسی حصہ کا رقبہ طامع مع جب برز سرزبر کے درمیان حدود غائی مناسب کے کلی
لینے سے دریافت ہو گا (دفعہ ۱۷۵) اسی معلوم ہو گا کہ طامع بر ۵ سر ۵ بر کو کردی
سطح مستدیر کے کسی جز تر کسی کا رقبہ پڑا سکتے ہیں اور ۲ کر کے نصف سطح مستدیر کا رقبہ ہے
پس یہ رقبہ مستطیل بہہ حال ہو گا

مع طامع جب برجم برز سرزبر

حدود غائی و اولی گئی ہیں وہ کلیوں کو کل سطح مستدیر پر پہنچاتی ہے
اسے ہم کو بہہ حال ہوتا ہے کہ

یا مع طامع س جیسا برجم برز سرزبر یعنی اس ہے

(۱۷۳) ایک سطح مستدیر قطر کے نشان متوازی متساوی الابعاد کے گئے ہیں ایک
تیلی جس کا طول قطر کے دونوں کے درمیانی فاصلہ سے کم ہی ہو نہیں اکل بچا وں
سطح پیک دی گئی تو بتاؤ کیا خمال اس بات کا ہی کہ تیلی قطر کے نشانوں میں سے ایک کو قطع کر
فرض کرو کہ دو متصل کے قطر کے نشانوں میں بعد ۲ ہو اور طول تیلی کا ۲ ہے ایہہ
اسانی سے ہم کو معلوم ہو سکتا ہے کہ اسی کچھ سوال میں انقلاب نہیں واقع ہو گا اگر ہم بہہ قید
لگائیں کہ مرکز تیلی کا اوس خط پر واقع ہو کہ دو متصل کے خطوط نشان کے درمیان پہنچا جائے
اور وہ اوں پر زادی قائمی بنائے کیونکہ نسبت تمام وقوع کی صورتوں کے بل صورتوں
کے ساتھ باوجود اس قید کے وہی رہتی ہے

فرض کرو کہ دو خطوط متوازی جو منتخب کئی گئے ہیں اونہیں سے نزدیک خط سے
مرکز تیلی کا لا فاصلہ بر ہے اور بہہ فرض کرو کہ تیلی اپنے مرکز پر گومتے ہو تو بہہ ہر کے
اس مقام پر اوس کے مرکز کے سبب خمال اس بات کا کہ تیلی کسی خط پر آٹری گزرے

اول خط مستقیم سی ہی اور او سپر یون میں کھدی گئی ہیں اور ہر ایک مقام کا احتمال کیساں ہی اور
طول ان خطوط مستقیم کا صلہ در حصے تو احتمال سنات کا دریافت کرو کہ اونکا حصہ مشترک میں

سی برا مدہ ہو حاصل $(ط - ص + م + س) / (ط - ص)$

(۱۱) ایک غیر محدود سطح مستوی اور او سپر یون کے خطوط مستقیم متوازیہ مساوی الالباعہ کی گئی ہیں اور در حصے
کے خطوط مستقیم کے درمیان بعد میں ہی ایک خط منحنی تمقید جس میں کوئی نقطہ مخصوص نہ ہو اور جس کا قطر
چھوٹا اس سے ہو اور اس قہر پر پیکار کیا ہی تو ثابت کرو کہ کسی ایک خط مستقیم پر ان خطوط مستقیم میں سے
اوسکے واقع ہونیکا احتمال کس ہے اور ل احاطہ خط منحنی کا ہے

(۱۲) اور ب کے درمیان ط فاصلہ ہی اور اسے ایک قاصد ب کی طرف جلا اور قسار او کی موصل
فی گہنہ پر لیکن پہلے ہی کہ وہ پ پر پہنچے منہ برسلا پر شروع ہوا اور جستا ہوا اس فاصلہ سے تک
چلا گیا مگر ب سے پری نہ سرا اور اس کی پائل نو میل فی گہنہ تہی اگر فاصلہ کو منہ لے لے اور وہ اتنی پری چلا کر تہم چلا
اور پیغام پہنچانی کی اجرت میں جو رو پیروہ پاتا او سکونست محکوس وقت پیغام سانی سے
بشرج ن رو پیروہ فی گہنہ کی ہی اور فرض کرو کہ فاصلہ معلوم نہیں اور وہ بارش کے آغاز کا وقت ہی
معلوم نہیں مگر احتمال وقوع دونو کا کیساں ہی تو ثابت کرو کہ کھانکی توقع کی قیمت رو پیون میں

ن مو $(\frac{1}{ط} - \frac{1}{مو}) + \frac{1}{لو} (\frac{لو + مو}{مو})$ لوگ $(\frac{لو + مو}{مو})$ ہے

(۱۳) ایک قہر مستوی بہت بڑا ہی اور او سپر یون برابر برابر فاصلہ پر خطوط مستقیم سے کیا گیا ہے
اور دوسرا رول ہی برابر فاصلہ پر خطوط مستقیم سے کیا گیا ہی اور یہ خطوط مستقیم عمود دوسرے خطوط مستقیم پر ہیں
کوئی گئی ہیں اور انکا اوس مشترک قہر پر پیکار کیا ہی تو ثابت کرو کہ احتمال سنات کا ہی کہ خط کو قطع کر لگا

(۱۴) جن خطوط مستقیم کا او پر بیان کیا گیا ہے اوس پر ایک کعب پیکار جاسے تو
اس بات کا کیا احتمال ہے کہ وہ خط کو قطع کر لگا

(۱۵) فرض کرو کہ ن نقطے ترتیب وار ایک قطار میں خط مستقیم میں واقع ہو اور ان نقطوں سے
معین برابر صو کے کچھ گئے اور سوا اسکے اول معین بڑا دوسرا معین سے ہے اور دوسرا معین بڑا
تیسرے معین سے نہیں ہی اور یہی ہذا القیاس ثابت کرو کہ اوسط قیمت روین معین کی

سے $(\frac{1}{ن} + \frac{1}{ن-1} + \frac{1}{ن-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1})$

پنذر ہوان باب حساب تغیرات کا

حد غائی زیادتی اور کمی کئی کی جسمیں ایک مقدار متغیر حدود غامی میں کے ساتھ ملحق ہو۔
(۳۳۷) علم حساب الجبریات کی کتابوں میں معلوم جملوں کی حدود غامی حد زیادتی و کمی کی قیمتوں کا بیان مفصل ہوتا ہے مثلاً اگر مقدار متغیر متبوع لاکے جملہ معلوم کو تغیر کرے تو قیمت یا قیمتیں لاکے ایسے دریافت کر سکتے ہیں کہ وہی حد غائی زیادتی یا کمی پر پہنچاویں یا ہم بعض صورتوں میں ثابت کر دینگے کہ ایسے قیمتیں نہیں ہیں۔

اب ہم ایک اور نوع کے سوالات حد غائی زیادتی اور کمی کا بیان کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ وہ جملہ لاکا ہو اور وہ بالفعل غیر المعین ہو اور ہو ایک جملہ معلوم لاکا ہو $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ کا ہو اور فرض کرو کہ ہم کو لاکا اور کے درمیان وہ ربط دریافت کرنا ہے کہ کلی مع موزلا جو حدود غائی معلوم کے درمیان واقع ہو قیمت حد غامی کمی یا زیادتی کی سکے۔

اب ہم بیان کلی نہیں لے سکتے کیونکہ یہ معلوم نہیں ہے کہ جملہ لاکا ہے اس واسطے معلوم نہیں ہے کہ جملہ لاکا ہے اس واسطے جو طریقہ کہ سوالات حد غائی زیادتی اور کمی کی دریافت کرنے کا معمولی ہے وہ بیان کام نہیں آسکتا اسلئے ضرور ہے کہ ایک نئی ترکیب کا بیان ہو
(۳۳۸) اب جس معاملہ تحلیل کا بیان ہم کرینگے طالب علم اسکا نام حساب تغیرات رکھی اسکا موضوع یہ ہے کہ صور بیانیہ کلیات کے حد غائی زیادتی یا کمی کی دریافت کریں اور یہ صور بیانیہ ایسے فرض کی گئی ہیں کہ مقدار متغیر متبوع سے جو جملہ تغیر ہوے ہیں انکی مختلف صورتوں کے تقرر کرنے سے وہ تغیر ہوتی ہیں جب طالب علم کے پڑھنے کے قواعد کو معلوم ہوگا کہ اس حد غائی زیادتی یا کمی کے دریافت کرنے کے ترکیب بھی مثال علم حساب الجبریات کی ترکیب کی ہے جس سے حد غائی زیادتی یا کمی معلوم ہوتی ہے +
(۳۳۹) مناسب معلوم ہوتا ہے کہ علم حساب الجبریات میں ترکیب لکھی ہے اسکو ہم

بیان کرین طالب علم کو یاد ہو گا کہ حد غائی زیادتی یا کمی کی اصطلاحات میں اور
 اوکی تعریف علم حساب الجبریات کے رسالہ میں بہت توضیح کے ساتھ کی گئی ہے اور علم
 ریاضی میں اوکی وہی معنی لئے جاتے ہیں جو وہاں لکھے ہیں اکثر غلطی اس سبب سے
 ہوتی ہے کہ اصطلاحی معنی جو حد غائی زیادتی کے ہیں اور برسی برسی قیمت کے معنی جو
 روزمرہ کی بول چال میں ہیں ان دو معنی کو خلط ملط کر دیتی ہیں زیادتی اور برسی
 برسی کے معنی میں خلط ہو جاتا ہے۔

فرض کر دو کہ ر جملہ مقدار متغیر تابع لاکہ ہے پس اگر نہایت ہی چھوٹا تغیر لا من کیا جاوے
 تو اکثر اس سبب سے نہایت ہی چھوٹا تغیر ر میں پیدا ہو جائیگا اور اس کا مقابلہ بلحاظ مقدار کے
 تغیر لا سے ہو جائیگا ر کی حد غائی زیادتی یا کمی کی قیمت دریافت کرنے کا جو عمل ہے اور
 دو جز میں اول جز یہ ہے کہ ہم لاکہ کی ایسی قیمت تشخیص کرے میں کہ اس میں نہایت ہی چھوٹا
 تغیر ر میں نہایت ہی چھوٹا تغیر مقابلہ کے قابل نہیں پیدا کرتا بلکہ ایک تبدل نہایت ہی چھوٹا
 بمقابلہ لا کے تبدل کے ہوتا ہے اب دوسرا جز یہ ہے کہ اس نہایت چھوٹی تبدل کے جو
 میں لا کے تبدل کے سبب سے پیدا ہوا ہے اس کی علامت کا امتحان کرتے ہیں اور حد غائی
 زیادتی کی صورت اس علامت کا منفی ہونا اور حد غائی کمی کی صورت میں مثبت ہونا
 ضرور ہے۔

پس ہم اس عمل کو اختصار کے ساتھ یوں بیان کرتے ہیں کہ اول مرتبہ کی قیمت مقدار متغیر
 تابع کی تبدل میں معدوم کر دو اور دوسری مرتبہ کے ارقام کے علامتوں کا امتحان کر دو
 اب ہم اسی ترکیب کے متشا بہ بیان کریں گے جس سے کہ ہمارا سوال جو معروض بحث
 میں ہے حل ہو گا۔ بالفعل ہم اول ہی جز عمل ساری توجہ کرتے ہیں اور بعد ازاں
 دوسری جز عمل پر توجہ کریں گے۔

دہ باب اول ہم اوس طریقہ کتابت کا بیان کرتے ہیں جس کو آگے کام میں لائیں گے۔

فرض کرو کہ لامقدار تغیر تابع ہے درجہ لاکا ہے اور $\frac{1}{100}$ اور $\frac{1}{1000}$ سرحدی
 کی بلحاظ لاکے میں ہم فرض سے ایک نہایت چھوٹی مقدار کو تغیر کرینگے جو جملہ لاکا ہو
 اور اگر کسی مقدار کو تغیر کرے جو موقوف درپر ہو تو فرض سے اس زیادتی کو تغیر کرینگے
 جو در $\frac{1}{100}$ فرض میں بدلنے سے دین پیدا ہوگی مثلاً سرحدی $\frac{1}{100}$ پر خیال کرو
 جب زمین زیادتی فرض کی ہوتی ہے تو اس سرحدی میں زیادتی $\frac{1}{100}$ کی ہوتی ہے
 پس فرض سے مراد $\frac{1}{100}$ ہے اکثر اس میں آسانی ہوتی ہے کہ فرض کو $\frac{1}{100}$ کے جگہ
 کام میں لائیں اور فرض $\frac{1}{100}$ کی جگہ اب دوسری سرحدی $\frac{1}{100}$ پر
 خیال کرو جب زمین زیادتی فرض کی ہو تو دوسری مرتبہ کی سرحدی میں زیادتی
 $\frac{1}{100}$ ہوگی اکثر دوسری مرتبہ کی سرحدی کو ق سے تغیر کرو تو آسانی کے لئے فرق کو
 بجائی $\frac{1}{100}$ کام میں لاتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس ف اور صو کو بجای میسر سے
 اور چوتھی مرتبہ کی سرحدی کے کام میں لاؤ اور $\frac{1}{100}$ اور $\frac{1}{1000}$ کو فرض اور فرض
 تغیر کرو اور علیٰ ہذا القیاس سرحدیوں کو اکثر کو در $\frac{1}{100}$ سے تغیر کرتے ہیں اور
 فرض اور فرض اور فرض... مساوی لہ فرض اور فرق اور فرض... موافق اپنی نظیر کی ہیں
 (۳۴۱) فرض فرض کا داخل کرنا ایسا لاکر انٹر کا ہے طالب علم اس بات کو سمجھ جائیگی کہ اس
 زم کے مغضایسے ہی میں جیسے کہ علم حساب الجبریات میں ز کے مغضیے دو فرض اور فرض
 ایک لائنیت چھوٹی زیادتی کو تغیر کرتے ہیں زر علی العموم اس تغیر کو تغیر کرتا ہے جو
 جملہ معلوم کے قیمت میں بسبب تغیر قیمت متغیر تابع کے واقع ہوتا ہے اور فرض اس تغیر کو
 تغیر کرتی ہے کہ صورت جملہ میں کسی تغیر اختیاری کے سبب پیدا ہوا ہی مقدار جو فرض
 سے تغیر ہوا اسکو تغیر کہتے ہیں

(۳۴۲) فرض کرو کہ موعملہ معلوم لاؤ فرض $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{1000}$... تغیر کرتا ہے اور
 لاؤ = تابع موزلا اس میں لا اور لا حدود نامی کو تغیر کرتے ہیں قیمت کوئی تحریک

(۳۲۵) پس طالب علم اب حساب تغیرات کے اصل آثار ہی واقف ہو گیا ہوگا اور یہ اصل آثار یہ ہیں

(۱) تحویل فرد کی ہے۔ ا۔ ہ۔۔ + لایع ک فرد لایین
(۲) یہ اصول کہ کم معدوم ہونا کہ نو حد غائی زیادتی یا کمی کی رکھی اگرچہ اس مطلب کو تشریح بڑی ہے اور اس سوال کے طرح طرح توسیع ہوئی مگر جو دو نتیجے ہم نے اوپر لکھے ہیں وہی بڑی نتیجی ہیں۔

(۳۲۶) اب ہم نہایت تفریق کے ساتھ امتحان ان دو شرائط ک =۔۔ اور ہ۔۔ ا۔ ہ۔۔ =۔۔

کی صفت ذاتی کا کرتی ہیں مساوات ک =۔ کو مساوات جزئی کہتے ہیں
فرض کرو کہ $\frac{1}{2}$ سے اعلیٰ درجہ سر جزوی کا ہی جو مومین واقع ہوتا ہی تو یہ اکثر مسا میں ہی واقع ہوگا اور اس واسطے $\frac{1}{2}$ میں سر جزوی $\frac{1}{2}$ واقع ہوگی اور یہ سب سے اعلیٰ درجہ کا سر جزوی ہوگا جو کم میں واقع ہوگا پس مساوات جزئی ک =۔ کی جیسے درجہ کی ہوگی غرض اکثر درجہ مساوات جزوی کا دو چندا دس سر جزوی کے مرتبہ سے ہوگا جو مومین واقع ہوگا۔

مساوات جزئی کے مسائل کی یہ ثابت ہوا ہی کہ مساوات جزئی میں اتنے ہی مقادیر متعلقہ اختیاری ہوتے ہیں جتنا کہ درجہ مساوات جزئی کا ہوتا ہی
اب ہم یہ بتا دیں کہ مقادیر متعلقہ اختیاری جو مساوات ک =۔ کی داخل کرنے سے پیدا ہوتے ہیں کس طرح تشخیص ہوتے ہیں کہ جس سے نتیجہ محدود حاصل ہو بشرط ہ۔۔ ا۔ ہ۔۔ =۔۔ اسی کام آتی ہے

دو صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ کوئی شرط سوال میں کی قیمتوں کے واسطے نہیں لگائی جاتی اور اس کی جزئی

$$\frac{ن}{ر} = \frac{ن}{ر} + \frac{ع}{ر} + \frac{ف}{ر} + \frac{س}{ر}$$

اور جو جب فرض کے

$$۰ = ن - \frac{ن}{ر} + \frac{ف}{ر} - \frac{س}{ر} \quad (۱) \text{ پس}$$

$$\frac{ن}{ر} = \frac{ن}{ر} + \frac{ع}{ر} - \frac{ف}{ر} + \frac{س}{ر} + \frac{ر}{ر}$$

$$\text{اب } \frac{ن}{ر} + \frac{ع}{ر} = \frac{ن}{ر} + \frac{ع}{ر}$$

$$\frac{ف}{ر} - \frac{س}{ر} = \frac{ف}{ر} - \frac{س}{ر}$$

$$\frac{ن}{ر} + \frac{ع}{ر} = \frac{ن}{ر} + \frac{ع}{ر} - \frac{ف}{ر} + \frac{س}{ر} \quad (۲)$$

اس سے معلوم ہوا کہ کلی لینے سے

$$ن = \frac{ن}{ر} + \frac{ع}{ر} - \frac{ف}{ر} + \frac{س}{ر} \quad (۲)$$

اس میں سے ایک اختیاری مقدار متقلب ہے سب اعلیٰ درجہ سر جزوی جو (۲) میں واقع ہو سکتا ہے جو $\frac{س}{ر}$ کے اندر آتا ہے پس (۲) ایک مساوات جزوی یا مجموعین وجہ

کی ہے اور یہی کلی اول مساوات (۱) کی ہے اور مساوات (۱) چھٹے درجہ کی ہے خاص صورتیں $س$ یا $قو$ یا $ع$ کو صفر فرض کر کے نقل سکتی ہیں مثلاً بڑی البکار آبد صورت یہ ہے جہین $ن$ کے اندر صرف $د$ اور $\frac{س}{ر}$ ملے ہوئے ہیں (۱) کی یہ صورت ہو جاتی ہے کہ

$$ن = \frac{ن}{ر}$$

اور (۲) کی یہ صورت ہو جاتی ہے کہ

$$ن = \frac{ع}{ر} + \frac{س}{ر}$$

(۳۸) مساوات جزوی ک = ۰ یہی قابلیت ایک ہی کلی کی کہتی ہے جب مؤین مقدار تغیر تابع نہ داخل ہو اس واسطے کہ نہ = ۰ کے ہونی سے مساوات بہ ہو جائیگی کہ

$$\frac{ن}{ر} = \frac{ن}{ر} + \frac{ع}{ر} - \frac{ف}{ر} + \frac{س}{ر} = \dots$$

اور اس واسطے

$$\frac{ع}{ر} - \frac{ف}{ر} + \frac{س}{ر} = \dots$$

(۳۴۹) ہم کو معلوم ہے کہ لامع موزلا = منج موزلا زو یہ فرض کر لیا ہے کہ کلی کی حدود غائی بلحاظ د کے ایسی مقرر کی گئی ہیں کہ وہ متناسط اور اس کلی کی حد غائی کی ہیں جو بلحاظ د کے لیجائیں اور سر جزیان کی بلحاظ لا کی اور سر جزو یومی ارقام میں بیان ہو سکتی ہیں جو لا کے بلحاظ د کے لیجائیں پس مع موزلا زو بین و مقدار متبوع اولو کو تابع خیال کر سکتے ہیں اور اس نئی صورت میں کلی کی حد غائی زیادتی یا کمی کی ہم دریافت کرتے ہیں ہم پہلے سے اسکو یقینی جانتی ہیں کہ سوال نفس الامر میں مقدار متغیر متبوع کے تبدیل سے متبدل نہیں ہوتا اور اس سبب سے ہم کو وہی نتیجہ حاصل ہوگا جو اصل مقدار متغیر متبوع قائم رکھنے سے حاصل ہوتا۔

اس سے معلوم ہوا کہ دفعات ۳، ۴ اور ۵ کی صورتیں آپس میں مطابقت ہیں (۳۵۰) پہر ہم کو فرض کرنے دو کہ موین صرف د اور ق ملتف ہیں تو مساوات جزئی ک = ۰ کی تحویل اور اختصار

$$- \frac{ر عو}{ر لا} + \frac{ر ق}{ر لا} = ۰$$

اس واسطے حل لینے سے

$$عو = \frac{ر ق}{ر لا} + س$$

$$اور نیز \frac{ر مو}{ر لا} = عو \frac{ر عو}{ر لا} + \frac{ر ق}{ر لا}$$

$$= س - \frac{ر عو}{ر لا} + \frac{ر ق}{ر لا} + \frac{ر ق}{ر لا}$$

اس واسطے کلی لینے سے

$$مو = س + س + س + س + س$$

یہاں س ۱ اور س ۲ متساوی مستقل ہیں اس صورت میں مساوات جزئی ک = ۰ چوتھے درجہ کی ہے اور نتیجہ جو حاصل ہوگا وہ مساوات جزئی درجہ دوم کی ہے پس ہم نے دو قدم مساوات جزئی ک = ۰ کی کلی میں طے کئی

(۳۵۱) اب ہم چند مثالوں کو لکھتے ہیں اور او میں جز اول کی طرف حد غائی زیادتی یا کمی

قیمت کو دریافت کرنے کی واسطے عمل میں بالکل توجہ کرینگے دفعہ ۳۳۴ دیکھو

(۳۵۲) دو نقطوں کے اندر چوٹے سے چوٹا خط دریافت کرو

اس مثال کو نقطہ اس کے لکھا ہے کہ صورت قانونیہ کی توضیح خوب ہو جائی کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ نتیجہ خط مستقیم ہوگا جو ان دو نقطوں کو وصل کرینگا

یہاں $بر = \sqrt{(۲ع + ۱)}$ اور $لو = \sqrt{(۱ + ۲ع)}$ زلا

پس موین $ع$ ملتف ہیں اور مساوات $ک =$ کی تحویل اور اختصار یہ ہوگا کہ $\frac{ع}{ع} =$

پس جو ایک مقدار مستقل ہو یعنی $\sqrt{(۲ع + ۱)}$ ایک مقدار مستقل ہو اس سے ثابت ہوتا ہے کہ

$ع$ ایک مقدار مستقل ہو اس واسطے خط چاہئے ایک خط مستقیم ہو

اس صورت میں $ه = ۱$ ۔ $ه = ۰$ ۔ $\frac{فرء زرع}{\sqrt{(۲ع + ۱)}} - \frac{فرء ع}{\sqrt{(۲ع + ۱)}} =$

اگر اب دو نقطے نقاط معین ہوں تو یہ حاصل ہوگا کہ $فرء ۱ = ۰$ اور $فرء ۰ =$ پس

$ه = ۱$ ۔ $ه = ۰$ ۔ معدوم ہوتا ہے تو وقت $ع$ کی اس شرط سے دریافت ہوتی ہی کہ خط

مستقیم دو نقاط معین میں گزرے

لیکن فرض کرو کہ معین دو نقطوں کی ایسی نہیں مقرر ہوئی اور محدود مقرر نہیں کیونکہ لا اور لا

مقادیر مستقل خیال کی گئی ہیں اس صورت میں $فرء ۱$ اور $فرء ۰$ اختیاری ہیں اور اس واسطے

$ه = ۱$ ۔ $ه = ۰$ ۔ ضرور نہیں ہے کہ معدوم ہو اس مثال $فرء ۱$ اور $فرء ۰$ کے معدوم

نہ ہوں اس باب کے لئے ضرور ہے کہ $ع ۱$ اور $ع ۰$ معدوم ہونی چاہی پس صورت قانونیہ

بالکل مطابق اس امر یہی ہے کہ جب دو خطوط مستقیم متوازی ہوں تو شبہ سی چھوٹا

فاصلہ ان کے درمیان خط مستقیم ہوگا جو معدوم دو نقطوں پر ہو۔

(۳۵۳) ایک خط ایسا دریافت کرو کہ اس کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک چڑھت ہی جائے

ترجائی اس سوال کے معنی بالتفصیل یہ ہیں کہ فرض کرو نہایت تلی ملی ہو

اور وہ دو نقطوں کو وصل کرتی ہو اور ذری ذرہ اس تلی کے اندر پہلے تو ہم کو

یہ دریافت کرنا منظور سی کہ اس ذرہ کی اترنے کا وقت نہایت ہی کم ہو اس سوال کا نام
اقل الزمان ہو سکے اور اس کو اول اول مسئلہ ۱۶۹۶ میں برنولی صاحب فی ایجاد کیا تھا اور اس کی وجہ سے
یہ حساب تغیرات کا ایجاد ہوا۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ خط مطلوب ایک سطح عمودی میں واقع ہو تا ہے اور اس سطح میں دو
معلوم نقطے ہیں اور فرض کرو کہ محور کا عمود وار اندازہ کیا جاتا ہے اور محور مذکور یا محور
کو کہ وہ اوپر کے نقطے پر گزری اور ذرہ حالت سکون سے متحرک ہوتا ہو فرض کیا گیا ہے
اصول علم ادات کے موافق عمق و میں گرنے سے ذرہ کو رفتار $\sqrt{2gs}$ (شرح گفتنی ہے)
پس وقت اترنے کا $\frac{\sqrt{2gs}}{g}$ (۱) ملا پس ہم یہ مقرر کر سکتے ہیں کہ

$$s = \frac{g}{2} \left(\frac{2gs}{g} \right)^2$$

یہاں موہن و اور ع لطف میں پس بموجب دفعہ ۱۶۹۶ کے حد فای کمی کی ٹیٹے یہ ہونا
چاہی کہ

$$s = \frac{g}{2} \left(\frac{2gs}{g} \right)^2$$

$$s = \frac{g}{2} \left(\frac{2gs}{g} \right)^2$$

$$s = \frac{g}{2} \left(\frac{2gs}{g} \right)^2$$

اسی معلوم ہوا کہ $s = \frac{g}{2} \left(\frac{2gs}{g} \right)^2$ = ایک مقدار مستقل = $2g$ کے فرض کرو
اس واسطے $g = \frac{2g}{2} = g$

$$s = \frac{g}{2} \left(\frac{2gs}{g} \right)^2$$

اس واسطے $g = \frac{2g}{2} = g$ = طبعاً $\frac{g}{2}$ - $(2g - g) +$ ص اس میں ص ایک اور مقدار
مستقل ہے

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی مطلوب خط دیر ہی جب کا فائدہ افقی ہے اور جب کا اس منحنی
ہی اور قرن اوپر کے نقطہ پر ہے ہم مجدد کو اوپر کے نقطہ پر فرض کر سکتے ہیں

لولا = پس ص = ۰

$$\text{بیان} \quad \text{ص} - \text{ص} = \left[\frac{\text{ع فرد}}{(ا + ع + ۲)} \right] - \left[\frac{\text{ع فرد}}{(ا + ع + ۲)} \right] = \frac{۱}{(ا + ع + ۲)}$$

اور اب ہم طرفین کے نقطوں کو قائم فرض کرتے ہیں تو فرد اور فرد معدوم ہوتے ہیں اور اس واسطے ص = ص بھی معدوم ہوتی ہے

مقدار مستقل ط اس شرط کے سبب دریافت ہوتی ہے کہ خط تدویر نیچے کے نقطہ معلوم پر گذرنا ہی

لیکن فرض کرد کہ صرف نیچے کے نقطہ کا محدود معلوم ہی اور معین نہیں معلوم تو موافق سابق کے

ص معدوم ہوتا ہے ص = $\frac{(ع فرد)}{(ا + ع + ۲)}$ اب فرد اختیار ہی ہے
 اب ع = ۰ کے ہونا چاہی تاکہ ص معدوم ہو پس ماس خط تدویر کا نیچے کے جانب سے
 والے نقطہ پر باقی ہوگا اس صورت میں یہ شرط مقدار مستقل ط کی دریافت کر نہیں سکتا
 آئے

(۳۵۴) اب اس سوال کی یوں تفسیر کرتے ہیں کہ درجہ حالت سکون متحرک نہیں ہوا بلکہ وہ برقرار معین متحرک ہوا ہی اس صورت میں ہم یہ نہیں فرض کرتے کہ محور لا کا اوپر کے نقطہ میں گذرنا بلکہ محور لا ایسا مقرر کرتے ہیں کہ اوپر سے جو نقطہ معین بالاتر گزرنے میں متاخر حاصل ہو وہ در رفتار ہو جو ذرہ کو چلنے کے وقت حاصل ہی باقی حل رہی رہتا ہی جو سابق میں تھا لیکن قرن خط تدویر کا اوپر کے نقطہ معین پر نہیں ہوگا بلکہ محور لا کے اندر ہوگا
 (۳۵۵) دو نقاط معین کو وصل کرتا ہوا خط ایسا دریافت کرو کہ اس خط اوپر کی لف اور نصف قطار انتخاب جو اس کے اطراف سے چھے جائیں ان کے درمیان رقبہ کم از کم ہو
 بموجب دفعہ ۷ کے صورت بیان یہ جو حد غائی کی رکھے وہ یہ ہے

$$\text{لا ابع} \quad (ا + ع + ۲) \quad \text{لا زلا}$$

پہان موین ع اور ق تلف ہوتا ہے اور اس واسطے ہی موجب دفعہ ۵۰ کی حد غامی کلی کی واسطے ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مو} = \text{فوق} + \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲$$

$$\text{یعنی } \frac{(۱ ع + ۲)}{ق} = \frac{(۲ ع + ۱)}{ق} + \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲$$

$$\text{اس واسطے } (س ۱ ع + س ۲) = \frac{۲}{(۲ ع + ۱)}$$

$$\text{کلی لینے سے } \frac{\text{س} ۱ ع + \text{س} ۲}{۲ ع + ۱} = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = ۰۰۰ (۱) \\ \text{نیز } \frac{(س ۱ ع + س ۲ ع)}{(۲ ع + ۱)} = \text{س} ۲ ع$$

$$\text{اس واسطے کلی لینے سے } \frac{\text{س} ۱ ع + \text{س} ۲}{۲ ع + ۱} = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ + \text{مقدار مستقل} \\ \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ + \text{مقدار مستقل}$$

$$\text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = \frac{(س ۲ ع - س ۱)}{۲ ع + ۱} + \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = (۲) \\ \text{س} ۱ ع کو (۱) اور (۲) سے ساقط کر دو$$

$$\frac{(س ۲ ع - س ۱)}{۲ ع + ۱} = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = ۰۰۰ (۲) \\ \text{اس واسطے}$$

$$\frac{\text{س} ۲ ع - س ۱}{۲ ع + ۱} = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = ۰۰۰ (۲) \\ \text{اس واسطے}$$

اس میں ب ایسا ہی کہ ب = س ۱ ع + س ۲ = س ۱ ع + س ۲
فرض کر کہ صو طول قوس خط منحنی کا ایک نقطہ معین سے اندازہ کیا جائی تو آخر مساوات کی کلی لینے سے ہم کو یہ حاصل ہوگا

$$\text{صو} + \text{س} = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = \text{س} ۱ ع + \text{س} ۲ = ۰۰۰ (۲) \\ \text{اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی خط تدویر ہوتا ہے دفعہ ۲ دیکھو}$$

اب ہم صورت بیان یہ ہے۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔ کا امتحان کریں تو یہ حاصل ہے کہ

$$۱۔ ۱۔ ۱۔ = فرد (عو - ر) (۱ + فرع ا فوا)$$

$$۱۔ ۱۔ ۱۔ = فرد (عو - ر) (۱ + فرع فو)$$

اطراف کے نقطہ معین فرض کئی گئے ہیں تو فرد اور فرد معدوم ہوتی ہیں پس

$$۱۔ ۱۔ ۱۔ = فرع ا فوا اور ۱۔ ۱۔ ۱۔ = فرع فو$$

فرض کرو کہ ہم یہ شرط لگائیں کہ خط مطلوب کے جو ماس اطراف کے نقطوں سے نکالے جائیں

تو انکی ایک سمت مقرر ہوتی ہے پس فرع معدوم ہوتی ہے اور ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔

معدوم ہوتی ہیں اس صورت میں خط تدویر کا ان شرائط سے دریافت ہونا چاہیے کہ

وہ دو نقاط معلوم ہو کر رہے اور ان نقطوں سے جو اسکے ماس نکالی جائیں انکی سمت

معین ہوں لیکن اگر کوئی شرط کی قیمتوں کے ساتھ حدود غای برہ نکالی جائی تو

ہم کو یہ حاصل ہونا چاہیے کہ فرد = ۰ اور فرد = ۰ تاکہ ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔ معدوم ہو جائے

$$اب فرد = \frac{۲(۱+ع)۲}{۱۰} اور نصف قطر انحرار = \frac{(۱+ع)۲}{۲}$$

پس نصف قطر نقاط اطراف پر معدوم ہو یعنی خط تدویر ان نقاط پر قرن رہی

(۳۵۶) اس حجم ستدیر کی صورت دریافت کرو کہ جب کو مایع میں متحرک کریں تو اسکا

مقابلہ یہ مایع نہایت ہی کم از کم کری اور مسئلہ مقابلہ کا حسب معمول تسلیم کر لیا گیا ہے

محور لا کو محور حرکت مقرر کرو پس مسئلہ مقابلہ کو تسلیم کرو اسکا بیان علم آب کی کتابوں

میں ہوتا ہے پس صورت بیان یہ جو حد غای کمی کی رہی یہ ہوگی

$$لایع = \frac{۳ع}{۱+ع} رلا$$

ہاں مومین داؤع متفہم ہیں اور اس واسطے بموجب دفعہ ۳۴ کے حد غای کمی کے

واسطے یہ حاصل ہونا چاہیے کہ

$$مو = عو + س$$

$$\text{یعنی } \frac{2ع + 3ع + 5ع}{2(ع + 1)} + س = 0$$

$$\text{اس واسطے } \frac{2ع + 3ع + 5ع}{2(ع + 1)} + س = 0$$

یہ مساوات جزی سے خط منحنی مطلوب تثبیت ہوتا ہے

۴۔ کمان جبکی حدود غائی متغیر ہوتی ہیں

(۳۵۷) ہم نے نہایت توضیح اور تفریح کے ساتھ آئین بیان کر دیا جسے کہ حدود غائی کی زیادتی یا کمی کی اس حالت میں دریافت ہوتی ہے کہ آئین ایک مقدار متغیر متبوع ملتف ہو اور کل کی حدود غائی مستقل ہوں اب ہم سوال مذکور کو توسیع دیتی ہیں اور کلی کی حدود کو متغیر ٹیپر کر ہم دیکھتے ہیں کہ کیا مشکل پیدا ہوتی ہے

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ایک سطح عمودی معلوم میں دو خطوط منحنی معلوم ہیں اور ہم کو مطلوب ہے کہ ایک خط منحنی جس پر کوئی ذرہ نہایت کم وقت میں اتر جائے ایک خط منحنی سے دوسرے خط منحنی تک دریافت کریں اور ذرہ اس رفتار سے متحرک ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم میں گرنے سے اس کو حاصل ہوتی ہے بیان ہم کو ایک نقطہ ایسا دریافت کرنا ہے جس پر سے ذرہ اوپر کے خط منحنی کو چھوڑنا ہی دوسرے نقطہ معلوم کرنا ہے جس پر گرنے کی خط پر ذرہ پہنچتا ہے اور وہ رستہ دریافت کرنا ہے جو یہ ذرہ طے کرتا ہے اسلئے ہم کو کچھ زیادہ اوپر کے مثالوں کی نسبت کرنا چاہئے اب ہم یہ بیان کرتے ہیں کہ ہم کو کیا عمل کرنا چاہئے جو کچھ اوپر بیان ہوا ہے اسے ہم کو یہ معلوم ہے کہ خط منحنی خط تدویر ہو گا جس کا قاعدہ افقی اور قرن معلوم خط مستقیم افقی ہو گا اس واسطے کہ فرض کرو کہ ایک اوپر کے خط منحنی اور کے خط منحنی کی کسی نقطہ سے نیچے کے خط منحنی کی کسی نقطہ تک کہیں چاہیے یہ خط منحنی کم از کم وقت کا ہئین ہو سکتا اس واسطے کہ ہم اس بات کو جانتے ہیں کہ تیسرے نقاط اطراف بدلتی ہیں ہم ایک خط منحنی کم وقت کا بہ نسبت اس خط منحنی کے دریافت کر سکتے ہیں یعنی ایک خط تدویر جس کا قاعدہ افقی ہو اور قرن اس کا خط افقی معلوم ہو چونکہ ہم اس بات کو جانتے ہیں کہ

کامل تبدل لوگا جو بسبب تغیر کے اور تغیر حدود غائی کی ہو معلوم ہو جائیگا۔
 (۴۵۹) اگر محمد دین کے خد بنانے والی قیمتوں کے ساتھ کوئی شرط لگائی جائی تو ارقام
 زائد جو ایسی ہیہ حاصل ہوئیں ہین کہ
 موزلا - موزلا۔

ضرور اس بات کے فرض کرنے سے معلوم ہو جائیگی کہ $موزلا = ۰$ اور $موزلا = ۰$ پس
 اول مساواتوں کے جو حصہ ۱ - حصہ ۰ = سی حاصل ہوتی ہین یہ اوپر کی دوئی
 اور مساواتین زیادہ ہوئیں اور دوئی مقادیر لا اور لا کی قیمت سی دریافت کرنی
 ہوگی ایک صورت کثیر الوقوع ہے کہ خد بنانی والی قیمتیں معلوم مساواتوں کی شرائط کو
 پورا کرتی ہین ایسی صورت کا بیان ہم نے دفعہ ۴۵۳ میں کیا ہے جس میں کہ ایک خط منحنی
 مطلوب ہے کہ جس کے نقاط اطراف دو خطوط منحنی معلوم پر واقع ہوں۔
 اب ہم کلی کی خد غائی کا بیان کرتے ہین او میں مقادیر کے تفسیر کرنے کے واسطے ہم نیچے لکھا دیں گے
 فرض کرو کہ $د = د + فر$

پس اگر یہاں خد غائی میں تغیر نہوتا تو مقادیر تغیر کی انتہا کی قیمتیں لا اور د پہلے تغیر
 سے اور لا اور د بعد تغیر کے ہوگی لیکن اگر لا بدل کر
 لا + زلا ہو جادی تو د بدل کر

$$\left[د + \frac{زلا}{د} + \frac{۱}{د} \left(\frac{زلا}{د} - (زلا + ۰) \right) \right]$$
 ہوگا
 یعنی زلا کی دوسری قدر اور اس سے اعلیٰ درجہ تو تو کو خارج کر دین لودہ بدل کر
 $د + \left(\frac{زلا}{د} \right)$ زلا ہوگا یعنی حاصل ضرب $د$ زلا بدل کر
 $د + فر + \left(\frac{زلا}{د} \right)$ زلا ہوگا فرض کرو کہ ارتباط معلوم جس نے انتہا کی قیمتوں کی
 شرائط پوری ہوتی ہین یہ ہی کہ

$$د = مچ (۴)$$

تو یہ بھی ہونا چاہی کہ $د = ۱ = صج (لا)$

اور نیز $د + فرد + (-\frac{ز}{لا}) = زلا = صج (لا + زلا) = صج (لا) + صج (لا) = زلا$
 اول مرتبہ تک پس

$$فرد = ۱ = [صج (زلا) - \frac{ز}{لا}] زلا$$

اس سے ارتباط فرد اور زلا کے درمیان معلوم ہوتا ہے پس انین سے ایک کو کامل قیمت
 فرد میں سے ساقط کر سکتے ہیں۔

اور اسی طرح ارتباط درمیان فرد اور فلا کی دریافت ہوتا ہے

سوالات علم ہند میں $(\frac{ز}{لا})$ ماس زاویہ میلان محور لا اور اوس خط مستقیم کا ہے جو
 خط منحنی مطلوب کو مس حد کی نقطہ برکت ہے اور $صج (لا)$ ماس زاویہ میلان محور لا
 اور خط مستقیم کا ہے جو ماس خط منحنی کا اوس نقطہ ہے

ایک خاص صورت بتلائی جاتی ہے بعض اوقات فزری بکار آمد اور فائدہ مناسی فرض کر دے

بتدل کامل $د$ کا صفر ہے تو اس سے یہ حاصل ہوگا کہ $فرد + (-\frac{ز}{لا}) = زلا = ۰$ اس طرح

اگر $د$ کا بتدل کامل صفر ہو تو فرد $+ (-\frac{ز}{لا}) = ۰$

(۳۶۰) ہم دفعہ گذشتہ کی توضیح شکل سے کرتے ہیں

فرض کر دے کہ اب خط منحنی مطلوب ہے اور

م ب ل خط منحنی معلوم ہے جس کی طرف ب

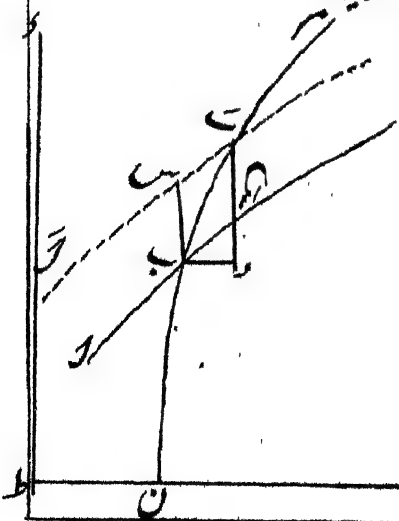
پر خط منحنی مطلوب واقع ہوتا ہے اور ہر

محین $د$ کو فرد کی تغیر لگائی ہے جو خط منحنی

اب سے کبھی اوسکو اب سے تغیر کر دے

ب سے اور ب سے د متوازی محور د

کھینچو اور ب د متوازی محول کا تو آخر کو



ب س = فرد اور ب د = زلا اور ب د = حج (لا) زلا اور س د = (زلا) زلا
 اس سے معلوم ہوا کہ ب س = [حج (لا) - (زلا)] زلا پس ہندسیہ معنی مجازی
 عمل کے یہ ہیں کہ اعلیٰ درجہ کی مقدار کو درجہ کم اور اعلیٰ درجہ کی مقدار کو قائم رکھیں
 تو ب س = ب س آخر کو ہو گا۔

(۳۶۱) اب وہی صورت سوال قلیل الزمان کا بیان کرتی ہیں کہ جب کا ذکر دفعہ ۳۵ میں
 ہوا ہے طریقہ کتابت وہی اختیار کرو دفعہ ۳۵ میں مذکور ہے پس

$$\text{فرلو} = \text{موا زلا} - \text{موا زلا} = \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right] - \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right]$$

$$+ \frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} - \frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} = \text{موا فر زلا} - \text{موا فر زلا}$$

$$\sqrt{(ع+۱) ط} = \sqrt{(ع+۱) ط}$$

$$\text{پس فرلو} = \text{موا زلا} - \text{موا زلا} = \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right] - \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right]$$

فرض کرو کہ مساوات خط منحنی کی جس سے کہ درجہ حرکت شروع کرتا ہے = ہر (۴)

ہے اور مساوات خط منحنی میں جس پر کہ درجہ حرکت کر کے پہنچے گا = حج (۴) ہے
 تو بموجب دفعہ بالا کے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فر د} = \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right] - \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right] = \text{فر د}$$

پس قیمت فرلو کی اس صورت میں لکھی جاسکتی ہے

$$\text{فرلو} = \text{لر زلا} - \text{لر زلا}$$

$$\text{اس میں لر} = \text{موا} + \frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} = \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right] - \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right]$$

$$\left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right] + \frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} = \left[\frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}} \right] + \frac{\text{ع فرد}}{\sqrt{(ع+۱) ط}}$$

$$\text{لو} = \frac{\text{لا} \times \text{ع} + \text{ع}^2}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2}$$

پس دفعہ ۳۶۱ کے حل میں $\frac{\text{لا}^2}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2}$ سے

بدلنا چاہئے اور فرلو جو صورت بیانہ لکھی ہے اس پر ارقام دفعہ ۳۶۲ کو زیادہ کرنا چاہئے

$$\text{بیان لو} = \frac{\text{لا} \times \text{ع} + \text{ع}^2}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} \text{ پس } \frac{\text{لا}^2}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} \text{ صرف حد بنانی والی قیمت ہے جو مومین واقع}$$

ہوتی ہے اس واسطے اول پر ہم یہ زیادہ کرتے ہیں کہ

$$\text{فر۔ لا} \times \frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}} + \text{لا۔ لا} \times \frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}} = \frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}}$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ بموجب دفعہ ۳۶۱ کے ک = ۰ رکھتی کے بعد ہم کو یہ حاصل

$$\text{ہوتا ہے کہ فر۔ لا} = \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا}$$

اس میں لا اور لا قیمتیں مبین دفعہ ۳۶۱ کی رکھتی ہیں۔

اب اس صورت میں

$$\frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}} = \frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}} = \frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}} = \frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}}$$

$$\text{اس واسطے لا} \times \frac{\text{نمو}}{\text{ر۔ لا}} = \text{ع۔ ع} = \frac{\text{ع}^2 - \text{لا}^2}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2}$$

$$\text{اور فر (لا) (لا) = ہر (لا) (لا) مثلاً دفعہ ۳۶۱}$$

$$\text{پس فرلو} = \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا} + \text{لا۔ لا}$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} = \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2}$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} = \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{\text{ع}^2 - \text{لا}^2}$$

لا اور لا کی امثال کو برابر صفر کے لکھنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$1 + \text{ع} + \text{ع}^2 = 0 \text{ اور } 1 + \text{ع} + \text{ع}^2 = 0$$

$$\text{پس ہر (لا) = ع (لا)}$$

اس سے ثابت ہوا کہ خطہ دیرینہ کے خط منحنی قائم کوائمی زاویوں پر قطع کرتا ہے اور

اور کے خط منحنی قائم ماس نقطہ ابتدای پر متوازی خط منحنی زیرین کے اوس ماس کا ہی جو نقطہ انتہائی سے کینچا جائے

کلیان جنین و مقدار متغیرین

(۳۶۴) اب تک ہم نے یہ فرض کیا تھا کہ درجہ ایک مقدار متغیر تابع کا ہے اب فرض کرو کہ وہ درجہ دو مقدار متغیر تابع کا ہے

فرض کرو کہ وہ ایک درجہ لا اور د اور دے کا ہے اور سر جزویان د اور دے کی بلحاظ لا کی ہیں کہ

$$لو = لا + مع موزلا$$

اب ہم کو یہ دریافت کرنا چاہئے کہ د اور دے میں جو تبدل پیدا کئی جائیں اولے کو کی قیمت میں تغیر ہوتا ہے۔

دفعہ (۳۶۵) کی طرح عمل کرنے سے ہم کو نتیجہ ہاتھ آئے گا کہ

$$فرلو = صہ - صہ + صہ - صہ + صہ + صہ (ک فر + ل فر) زلا$$

ان میں رموز کے معنی یہ ہیں کہ

فر و موافق سابق ایک اختیاری تغیر کو جو د میں پیدا کیا جائی تغیر کرنا ہے یعنی فر و نہایت ہر چوٹا اختیاری حملہ کا ہے

ک موافق سابق کے

$$\frac{دو}{دو} - \frac{دو}{دو} + \frac{دو}{دو} + \frac{دو}{دو} - \frac{دو}{دو} \dots$$

اس میں $\frac{دو}{دو}$ و $\frac{دو}{دو}$... سر جزوی بالاجزا ہیں

اور $\frac{دو}{دو}$ و $\frac{دو}{دو}$... سر جزویان کامل بلحاظ لا کے ہیں

فرے اختیاری تغیر ہی جو دے میں پیدا کیا جائی یعنی فرے نہایت چوٹا اختیاری حملہ کا ہے ل دہی تعلق سے رکھتا ہے جو ک تعلق دے سے رکھتا ہے یعنی

$$ل = \frac{دو}{دو} - \frac{دو}{دو} + \frac{دو}{دو} - \frac{دو}{دو} \dots$$

حصہ ۱۔ حصہ ۲۔ معنی یہی بیان کئی گئے ہیں اور جی۔ جی۔ وہی تعلق سے سے کہتا ہے جو حصہ ۱۔ حصہ ۲۔ تعلق سے سے کہتا ہے

(۳۶۵) دفعہ بالا کے فرضوں کے موافق لو کی قیمت حد غائی زیادتی یا کمی کی دریافت کرتے ہیں۔

(۱) اگر وہ متعلق ہوں تو فرضوں کے معدوم ہونے کی واسطی ضروری کہ ک۔ = ۰ اور ل۔

اور نیز حصہ ۱۔ حصہ ۲۔ جی۔ جی۔ = ۰

قیمتیں اور ل۔ کی ارقام بالا میں مساوات خبریہ ک۔ = ۰ اور ل۔ = ۰ کی حل کرنے سے دریا بنو گین اور مقادیر متعلقہ اختیاری جو ان حلون میں واقع ہوں وہ اس طرح دریافت ہو سکتے

ہیں کہ مقادیر اختیاری فرو۔ اور فرو ۱ و (فرو ۲)۔ فرو ۳۔ فرو ۴۔ و (فرو ۵)۔ جو حصہ ۱۔ حصہ ۲۔ جی۔ جی۔ = ۰ میں واقع ہوتی ہیں اور انکی مثال

کو برابر صفر کے لکھیں۔

(۲) فرض کرو کہ لو اور ل۔ آپس میں بے تعلق نہیں بلکہ انہیں یہ ارتباط ہے کہ جج (لا دو دے) = ۰ اور یہ ارتباط ہمیشہ مستحکم رہتا ہے اسلیئے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

جج (لا دو دے + فرو دے + فرو ۳) = ۰

اور اسیلو سے آخر کو

جج فرو + جج فرو ۳ = ۰

بیس کلی لا بیع (ک فرو + ل فرو) زلا کے

لا بیع (ک - ل) = $\frac{\frac{ل}{فرو} - \frac{ل}{فرو}}{\frac{ل}{فرو}}$ فرو زلا ہو جائیگی

اب تاکہ یہ معدوم ہو تو نقطہ پہلے کیسی شرط ہوگی کہ $\frac{ل}{فرو} = \frac{ل}{فرو}$

اس مساوات جزئی کو مج (لاور دے) کے شامل کر کے ہم دوسرے کو دریافت کر سکتے ہیں

موافق سابق کے ہم کو یہ بھی حاصل ہے

$$\text{ہے } - \text{ہے } + \text{ہی } - \text{خی } = ۰$$

(۳۶۶) مثال کے واسطے یہ سوال لکھتے ہیں کہ ایک سطح مستدیر معلوم برد و نقاط معلوم کے درمیان ایک خط دریافت کرو جس کا طول حد فاصلی کمی کی رکھے۔

بیان ہم کو یہ معلوم ہے کہ

$$\text{لو} = \text{لابع} \quad \text{م} \quad \left[۱ + \left(\frac{\text{زلا}}{\text{زلا}} \right)^3 + \left(\frac{\text{زلا}}{\text{زلا}} \right)^3 \right] \text{زلا} = \text{لابع} \quad \text{م} \quad (۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)$$

پس ک = - زلا $\left(\frac{\text{زلا}}{\text{زلا}} \right)^3 = \text{اورل} = - \frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)}$ فرض کرو کہ مج (لاور دے) = مساوات سطح مستدیر کی جس پر خط واقع ہوتے ہیں تو بموجب دفعہ گذشتہ کے یہ شرط حد فاصلی کمی کے واسطے ہوگی کہ

$$\frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)} = \frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)}$$

فرض کرو کہ خط منحنی کے طول قوس کو صورتیہ کرنا ہے تو

$$\frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)} = \frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)} \text{ اور } \frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)} = \frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)}$$

پس مساوات اوپر کی اس طرح لکھی جاتی ہے کہ

$$\frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)} = \frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)} \quad (۱)$$

اس ہم یہ قیاس بالقرینہ کر سکتے ہیں انہیں سے ہر ایک کسر برابر

$$\frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)} = \frac{\text{زلا}}{(۱ + \text{زلا} + \text{زلا}^۲)}$$

کے سی

کے ہی

دلا

اور اسکو ہم ثابت کر سکتے ہیں اسواسطے کہ (۱) میں ہر ایک کے متوافق ایک مشہور مسئلہ جبریہ کی برابری

$$\frac{\frac{رے}{رے} + \frac{رے}{رے}}{\frac{رے}{رے}} = \frac{\frac{رے}{رے} + \frac{رے}{رے}}{\frac{رے}{رے}}$$

اور چونکہ مساوات مح (لا دو دے) = خط منحنی کے سر نقطہ کے واسطے مستحکم ہو تو ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{رے}{رے} + \frac{رے}{رے} + \frac{رے}{رے} = ۰$$

اور بموجب مشاہد معلوم کے

$$\frac{رے}{رے} + \frac{رے}{رے} + \frac{رے}{رے} = ۰$$

اس سے معلوم ہوا کہ ایک خط کم از کم طول کا ان معلوم مساواتوں سے تشخیص ہوتا ہے کہ

$$\frac{\frac{رے}{رے}}{\frac{رے}{رے}} = \frac{\frac{رے}{رے}}{\frac{رے}{رے}} = \frac{\frac{رے}{رے}}{\frac{رے}{رے}} \dots \dots (۲)$$

علم ہند سے متبادلاً ثلثہ کی کتابوں میں ثابت ہے کہ (۲) کی مساواتوں سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی کے کسی نقطہ پر سطح ملصقہ میں سطح مستدیر کا عمود الماس اوس نقطہ پر داخل ہوتا ہے اس خط منحنی کو ہندسہ ارضی کا خط منحنی کہتے ہیں

(۳۶۷) دفعہ گذشتہ میں جہاں یہ فرض کیا ہے کہ دو نقاط قایم کے درمیان خط کہنچو دہا ہے فرض کرو ایک نقطہ قایم اور ایک خط منحنی قایم کے درمیان ایک خط کم از کم طول کا کہنچو فرض کرو کہ لا، موافق نقطہ قایم کے اور لا، موافق خط منحنی قایم کے ہے اب ہم ارقام پر خیال کرتے ہیں جو صہ + ح سے تعبیر ہوتے ہیں دفعہ ۱۶۳ کی طرح ہم کو دریا ہیکا کہ وہ بہہ ہیں

$$\frac{رے}{رے} + \frac{رے}{رے} + \frac{رے}{رے} = ۰$$

اب چونکہ خط منحنی مطلوب کی طرف خط منحنی معلوم برواقع ہوتی ہے تو ہم اس طرف پر یہ فرض کر سکتے ہیں کہ دو ارتباط کی شرائط پوری ہو گئیں کہ

$$اسے اسطے لا + س = ۲ \quad (ط - (س - ۱) = ۲)$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی مطلوب قوس مدور ہے

جو کہ اطراف کے نقطے قائم مقرر کئے گئے ہیں تو حصہ فرم کا جو موقوف اس حدود غامی پر ہوگا مساوی ہوتا ہے

مقدار مستقل سم اور سم اور ط تشخیص اصل سطح ہوتی ہیں کہ قوس مدور نقاط قائم ہیں کہ ان کے اور ان کے درمیان طول معلوم رکھے۔

(۳۷۰) طول خط منحنی کا معلوم ہے اس کی ایسی صورت دریافت کر دو کہ عمق اس کے مرکز ثقل کا سے غامی زیادتی کی رکھے

سمو را کو اعمتی اور محور کو عمود وار بنی کے طرف مقرر کر دو اور فرض کرو کہ طول خط منحنی کا ص سے تعبیر ہوتا ہے تو عمق مرکز ثقل کا ط لایع و ہا (ا + ع) زلا ہی اور طول لایع و ہا (ا + ع) زلا ہے

فرض کرو کہ مو = ط و ہا (ا + ع) + ط و ہا (ا + ع)

پس ہم کو قیمت حد غامی زیادتی یا کمی لایع موزلا کی دریافت کرنی چاہی

بیان ہو جب دفعہ ۳۷۳ کے یہ حاصل ہونا چاہئے کہ

$$مو = عو + س لیجئے$$

$$س = ط و ہا (ا + ع) + ط و ہا (ا + ع) = ص و ہا (ا + ع) + ط و ہا (ا + ع) + ط و ہا (ا + ع)$$

$$اس واسطے ع + ۲ = ص و ہا (ا + ع) + ط و ہا (ا + ع)$$

$$اور اس واسطے رو = [(و + ط ص) - ص و ہا (ا + ع)]$$

اس سے معلوم ہوا کہ لا = لو کہ [و + ط و ہا (ا + ع)] + س = س + [(و + ط ص) - ص و ہا (ا + ع)]

اس میں س = ایک نئی مقدار مستقل ہے اور لا = ص و ہا (ا + ع) اور ب = ط و ہا (ا + ع)

اس مساوات سے ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی مطلوب مجمل ہے اگر خط منحنی مطلوب کے تمام

لئے $u + ط = (1 + ط)u = (1 + ط)^n$ مس

اس واسطے کہ $\frac{P}{(1+r)^n}$ میں

یہ مساوات جزئی نقطہ منحنی کی ہر جگہ گزرنے سے سطح مستویہ مطلوب حاصل ہوگی فرض کرو کہ دوسری
نقطہ منحنی کے جس سطح مستویہ پر پیدا کرتا ہے نقاط قیام پر گزرتے ہوئے دریافت کرنی مطلوب ہیں تو
اس مقامی پر اقامہ معلوم ہو جائیگی

اگر محور حرکت پر کوئی نقطہ قائم رہے ایک نقطہ ہو تو قیمت = بسی مساوات خط معنی کی نہ لکھ
یواری ہوتی ہیں بس =

پس مساوات عام کا استحصال یہ ہوگا کہ

$$= \frac{b}{(r+1)n} + \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \left(\frac{1}{r+1} + 1 \right)$$

پس یہاں ایک قوس اور ریوایں خلافتی کے حاصل ہو گئے جس سے کہ سطح مستدیر مطلق حاصل ہو سکتی

۲۰۲۱ء ایسے ہی تاریک کا جکی شناخت پاکستان مجسم معلوم ہے اس کی صورت اس کے دریافت

درو کہ اب سلی جو کہ کیا ہفتہ براؤ کے کشش حد نامی زیادتی کی رہی

فرض کرد که محو الما خود را در شش هوا و نقطه کتش کا مقام سید و سر می

فرض کرو کہ قسم بہایت سی تلہ رہتا رہا کہ کو نین مجور لار سلووم مشنوی عمودی قسمی ہوا اگر وہاں

کا نصف قطر ہے اور نقطہ کثیف ہے اور اس کا فاصلہ لاہور اور کراچی کے درمیان ہے اور کراچی اور کٹافٹ ہو

توکشی (علم ادات کا تیرہواں باب ویکھو)

۱- $\left(\frac{a}{a+b} \right)$ ہوگا

اسو اے کلکٹرش مجسم کی

۱- $\left[\frac{u}{(u+1)} \right]$ ملازمی

اور محمد مجسم کا کہ قیلابیع مرکز لایسے

پس فرض کرو کہ $\frac{1}{\sqrt{a+b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ جس کو قیمت حد غائی زیادتی یا کمی کے لایع نوا کی دریافت کرنی ہے

شرط زائد - $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \dots$ کا امتحان یہاں ہوتا ہے کہ =

لیجئے $\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}$ =

اس واسطے $\frac{1}{\sqrt{a+b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ =

اگر محدود غائی لا اور لا کو فرض کرو کہ دینین قابلیت تبدیل کی ہے تو حد بنانی والی رقمیں
مور زلا - مو. زلا. حاصل ہوگی اور انکی معدوم ہونے کے واسطے ہم کو یہ حاصل ہونا چاہیے
مو. = ۰ اور مو. = ۰ اس سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ ۰ = ۰ اور ۰ = ۰ پس مساوات
 $\frac{1}{\sqrt{a+b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ سے جو کل خط منحنی مقید تحقیق ہوتا ہے محمولہ کے کروانے کے
گردش سے جسم بننا ہی اور قیمت ط کی اس شرط سے دریافت ہوتی ہے کہ جسامت معلوم ہی لینے
جسم معلوم ہے

کلی مشاہ

(۳، ۳) اب ہم کلی مشاہ کی قیمت حد غائی زیادتی یا کمی دریافت کرنی کا سوال حل کرتے
ہیں اور اسکو کلی مشاہ کے تغیر سے شروع کرتے ہیں

فرض کرو کہ سے جملہ مقادیر متغیر لے لعلق لا اور د کا ہے اور وہ بالفعل مجہول ہے اور مو جملہ
لا اور د سے و سولے اور د کے کا ہے اور لو = لایع و لایع موزلاز و کلی اول بلحاظ د کے
فرض کی گئی ہے اور محدود غائی و اور د جملہ لے کے فرض کئے گئے ہیں اب یہ تشخیص کرنا
بد نظریہ ہے کہ کونسا جملہ لا اور د کا ہو کہ حد غائی پر زیادتی یا کمی کی رکھی

فرض کرو کہ فرے نہایت ہی چوٹا اختیار سی جملہ لا اور د کا ہے اور فر مو اس تغیر کو تعبیر کرتا ہے
کہ مومین اس وقت پیدا ہوتا ہے کہ متغیر فرے کا پیدا ہوتا ہے اور لو کی تغیر کو ذکر کرتا ہے تو ہم کو
ایک صورت بیان یہ فر لو کے واسطے حاصل کرتی ہے

$$+ \text{فرباع} \quad (نفرے) - (نفرے) \quad \text{زلا}$$

+ (کواچ م فرے زری) = لا۔ (کواچ م فرے زری) = لا۔

- $\frac{1}{\text{ایح}} \left[\frac{\text{زی}}{\text{ایح}} - \frac{\text{زی}}{\text{ایح}} \right] \frac{\text{زی}}{\text{ایح}}$

اگر حدود غائی اور مقدار مستقل ہوں تو ارقام آخر سطر میں معدوم ہوتی ہیں
ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ حدود غائی کلی کی قابلیت تبدیل کی نہیں کہتیں تو ہم اس بات کو سہافی
سے دیکھ سکتے ہیں کہ جلد صورت بنائے قریب میں ان ارقام کی زیادہ کرنا چاہی کہ
(زلا ربع موزی) لا = لا - (زلا ربع موزی) لا = لا۔

+ لایمغ (موازی - موازی) زلا

علم ہندسہ کی استعمالات میں حدود غایبان کیلئے بلحاظ لا اور کے اکثر خط منحنی مقید کے احاطہ سے معلوم ہو سکتا ہے اس صورت میں $\omega = \infty$ اور دونوں حالتوں میں یہی کہ $\lambda = \infty$ اور $\lambda = 0$ اور اس واسطے مجموعہ فرمے زلا اور زلا مجموعہ کمزور محدود م ان دونوں

صورتوں میں ہوتی ہیں کہ لا = لا اور نیز لا = لا

(۳۷۴) فرولو کی قیمت جو دفعہ گذشتہ میں دریافت کی ہے اوسمیں ایک رقم کلی مثلاً ۵۰۰ روپے
فرولو کلی کی علامتوں کی اندر تلف ہی اوپر سے مفرد کلیان میں جو فرسے کی حد بنانی والی قیمتوں
پر موقوف ہیں دفعہ ۳۷۴ میں جو ترکیب کام میں آئی ہے اوس سے یہ استخراج ہوتا ہے فرولو
بیشی معدوم نہیں ہوگا اگر مثال فرسے کلی مثلاً ۵۰۰ روپے نہ ہوں پس فرولو کی حد غائی
زیادتی کسی کی لئے ایک شرط ضروری ہے کہ

۱۔ زمین - رتن =

یہ مساوات جزی سے کی دریافت کرنے کے واسطے ارقام لا اور زمین اور ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جملہ اختیاری جو اس حل میں واقع ہوتا ہی ایسا تشخیص ہونا چاہئے کہ فرلو میں ارقام معدوم ہوں لیکن مساوات جزی بالا جزا کی کلی یعنی میں ایسی وقت واقع ہوتی ہے کہ علما امتحان

ان ارقام کا حدود غائی پر نہیں ہو سکتا

(۳۵) مثال فرض کرو کہ سطح مستدیر جو خط منحنی معلوم مسمی احاطہ ہوا ایسے دریافت کرنی کی روش

حد فامی کمی کی رکھی

بیان بموجب دفعہ ۷۰ کے

$$s = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s} + 1 \right)}$$

موافق و دستور کے

$$\frac{نے}{۱۱۱} = ع اور نے = ق اور \frac{۱۱۱}{۱۱۱} = س اور \frac{۱۱۱}{۱۱۱} = ص اور \frac{۱۱۱}{۱۱۱} = ط$$

ایس حد فہم ز یادتی کے شرط کے استحقاقی یہہ ہوتی ہین

$$= \frac{z_n}{z} + \frac{z_m}{z}$$

$$= \frac{3}{(3+2+1)} \ln \frac{2}{3} + \frac{4}{(3+2+1)} \ln \frac{1}{3}$$

یعنی سا (ا+ع+ق) - (ع+س+ق+صو) + طو (ا+ع+ق) - (ع+صو+ق+طو) = ق

یعنی $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$

امتداد ثلاثہ کے علم ہندسہ میں ثابت ہے کہ اس مساوات سی سطح مستدیر مطلوب تعبیر ہوتی ہے

کہ ہر نقطہ پر دوسرے نصف قطر انحناء متحد المقدار اور مختلف العلامت ہیں

چونکہ ہم نے سطح مستوی کے احاطہ کو ایک خط مستقیم قائم مقرر کیا ہے اور فرض ہے اس احاطہ کے گرد معدوم

ہوئے تو ارقام جو دوحائی سے مربوط ہیں فرلو میں سب معدوم ہوتی ہیں

✦ حذریاوتی و کمی کی قیمتوں میں کمی ✦

اب ہم بعض مثالیں لکھیں گے جس کے توضیح دعا کی زیادتی اور کمی کی دوسرے جز کی تحقیقات ہو چکی

دفتر ۳۳۹ ویکو

اوس شمال پر خیال کرو حسین و نلقاط معلوم میں سے چوٹا خطہ رافنت کیا ہے

سو = $h(\lambda + e)$ اور $\lambda = \lambda_{\text{موج موزلا}}$

فرض کرو کہ x بدل کر y ہو جائے اور اس تبدل کا نتیجہ یہ ہو کہ x بدل کر y + فرع ہو جائے

x + فرع کو بجایے y کی جگہ رکھو اور پہلا x تو لو کی یہ صورت ہو جائیگی

$$(x + y) + \frac{y}{x + y} + \frac{y}{x + y} + \dots$$

اس میں ارقام جن کا بیان نہیں ہوا تیسری درجہ اور تیسری درجہ سے اعلیٰ درجہ کی فرع میں ہیں

$$x = \frac{y}{x + y} + \frac{y}{x + y} + \dots$$

ان ارقام میں سے اول رقم وہ جو فرضی تغیر کیا تھا اور لو کی تحقیقات حد کی کی جہاں تک ایک

ہوئی ہی وہ اس پر مشتمل ہی کہ یہ رقم معدوم ہو فرض کرو کہ یہ رقم معدوم ہوتی ہے اور تیسری اور

اوس سے زیادہ درجہ کی رقم کو خارج کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$x = \frac{y}{x + y} + \frac{y}{x + y} + \dots$$

اگر لا - لا مثبت ہی تو ہر یک جز ترکیبی اس کلی کا مثبت ہی ہیں فرو مثبت ہی اور اسلئے
لو کی قیمت حد غائی کمی کی حاصل ہوگی۔

۳۷۷ اب وہی صورت سوال قلیل الزمان کی جو صین نقاط اطراف قائم ہیں بیان

$$x = \frac{y}{x + y} + \frac{y}{x + y} + \dots$$

کو کہ x سے اور y کو x + فرع سے بدلوا اور مو کی مس قیمت کو پہلا x تو لو کی یہ صورت

$$x = \frac{y}{x + y} + \frac{y}{x + y} + \dots$$

$$x = \frac{y}{x + y} + \frac{y}{x + y} + \dots$$

اس سے ہم x کو حاصل کر سکتے ہیں - - - -

اب دفعہ ۳۷۳ کی عمل سے ارقام اول درجہ کی فرع میں معدوم ہوتی ہیں پس تیسری درجہ اور

تیسری درجہ سے زیادہ درجہ کی رقم کو خارج کر کے یہ ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$$x = \frac{y}{x + y} + \frac{y}{x + y} + \dots$$

اب ہم کو اس صورت بیانیہ کے علامت اور محالیت میں تحقیق کرنی ہے کہ لا اور کی درمیان توازن ہے وہ ۳۵۳ سے تحقیق ہوتا ہے اور بعض تبدل مثبت سی ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ فرو مثبت ہے

$$\text{چونکہ } \frac{1}{2} (ع + ط) = \frac{1}{2} (ع + ط) \quad \text{لا}$$

$$\text{ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ فرو = لا } \left[\frac{3}{2} (ط) - \frac{1}{2} (فرو) - \frac{1}{2} (ع + ط) + \frac{1}{2} (ع + ط) \right] \quad \text{لا}$$

$$\text{اب } \frac{1}{2} (ع + ط) = \frac{1}{2} (ع + ط) \quad \text{لا}$$

اور چونکہ تقاد اطراف قائم فرض کئی گئی ہیں اسلئے فرو حدود غائی پر معدوم ہوتا ہے اس واسطے

$$\text{لا } \frac{1}{2} (ع + ط) = \frac{1}{2} (ع + ط) \quad \text{لا}$$

$$\text{اب } \frac{1}{2} (ع + ط) = \frac{1}{2} (ع + ط) \quad \text{لا}$$

$$\text{اس واسطے لا } \frac{1}{2} (ع + ط) = \frac{1}{2} (ع + ط) \quad \text{لا}$$

$$\text{اور فرو = لا } \left[\frac{1}{2} (ع + ط) + \frac{1}{2} (ع + ط) \right] \quad \text{لا}$$

اس میں فرو مثبت ہی اور اس واسطے لو کی قیمت حد غائی کی حاصل ہوتی ہے

(۳۷۸) دفعہ گذشتہ سے ثابت ہوتا ہے کہ صورت بیانیہ دوم جسکی طرف فرو کو تحویل تحقیقات سابقہ میں

اسی ممکن ہے کہ ایک صورت سی حسین علامت تحقیق معلوم ہوا ایسی صورت میں ہونا چاہی کہ

کہ علامت ظاہر ہو عام مسئلہ اسکا اور کتابوں میں لکھا ہے۔

حساب تغیرات میں جن سوالات سی بحث ہوتی ہے اور میں خاص سوال کی ذات سی ہم ہمہ کم

یقین کے ساتھ تحقیق کر سکتے ہیں کہ اس میں حد غائی کی ہی اور حد غائی زیادتی کی نہیں یا حد

غائی زیادتی کی ہے حد غائی کمی کی نہیں

(۳۷۹) دفعہ ۳۵۴ میں جس سوال سی بحث کی تھی اس میں آسانی سے ثابت ہوتا ہے کہ

اجعل یعنی حد غائی کمی کی کہتا ہے بیان

$$\text{م } = (ا + ع + ق) \text{ اور } \text{لا } = (ا + ع + ق) \quad \text{لا}$$

فرض کرو کہ $\frac{1}{x}$ سے $\frac{1}{y}$ فرقی سے بدلیں اور اس بدلی کا نتیجہ یہ ہو کہ $\frac{1}{x}$ بدل کر $\frac{1}{y}$ + فرق ہو اور $\frac{1}{y}$ بدل کر $\frac{1}{x}$ + فرق ہو جس کی صورت یہ ہو جائیگی کہ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots$$

اول مرتبہ کی ارقام کو محدود سمجھو اور تیسرے اور اعلیٰ مرتبہ کی ارقام کو چھوڑ دو تو یہ حاصل ہوگا کہ
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots$

پس یکھون کی علامت کے ماتحت ضرور مثبت ہیں پس لو کی قیمت خدغائی کمی کی حاصل ہوئی

شرط قابلیت کلی

(۳۸۰) دفعہ ۳۸۴ میں ہم نے یہ دریافت کیا ہے کہ = ایک شرط ضروری کلی کی قیمت خدغائی زیادتی یا کمی کی ہے لیکن یہ ممکن ہے کہ بعض خاص صورتوں میں ارتباط کم = کی شرائط ارزوی تطابق پوری ہوتی ہوں اب ہم اس صورت کی مثال دیتے ہیں اور اس کی معنی بیان کرتے ہیں

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \dots$$

$$ن = \frac{رقم}{رغو} + \frac{رقم}{رلق} = \frac{۲}{۳۵} + \frac{۲}{۳۵} = \frac{۴}{۳۵}$$

$$\left[\frac{۲}{۳۵} + \frac{۲}{۳۵} - \frac{۲}{۳۵} - \frac{۲}{۳۵} \right] = \frac{۲}{۳۵} + \frac{۲}{۳۵} = \frac{۴}{۳۵}$$

ارقام کو جمع کرنے سے یہ دریافت ہوگا کہ

$$ن = \frac{رقم}{رغو} + \frac{رقم}{رلق}$$

محدوم ہوتا ہے پس اس مثال میں ارتباط =۔ ازروی تطابق ہے اور اسی کو ہی قیمت کی
نہیں دریافت کر سکتے اس مثال میں یہ دریافت ہوگا کہ

$$مح موزلا = \frac{لاؤ}{۳}$$

یعنی کلی مع موزلا بغیر کی قیمت مقرر کرنے کی ارقام لایں حاصل ہوگی پس اگر ہم لایں مع موزلا
کی قیمت حدغائی زیادتی یا کمی کی دریافت کرنی چاہیں تو $(\frac{لاؤ}{۳})$ کی قیمت
حدغائی زیادتی یا کمی کی تحقیقات کریں اسواسطی صورت بیانہ کلی غیر المعین کے حدغائی زیادتی
یا کمی سے جسکا بیان اتنا ہو کہ کچھ سے وکار بنیں بلکہ حدغائی زیادتی یا کمی اسی صورت بیانہ
کے دریافت کر نیکے معلوم کرنی تاکہ علامت کلی سے بری ہو

اس قسم کی حد زیادتی یا کمی کے سوالات بسوٹا و بطول کتابوں میں لکھی جاتی ہیں چونکہ وہ کچھ
ایسی دلچسپ مہین ہیں اسلئے ہم ادن پر تو جہنم کرتے

(۳۸۱) اب ہم علی العموم ثابت کرتی ہیں کہ ضروری اور کافی شرط مومین قابلیت کلی ہونیکے
بغیر اسکے کہ خاص قیمت و کی ارقام لایں مقرر کیجائی ہیں، کہ کہ =۔ ازروی تطابق صحیح ہو
صورت بیانہ جو قابلیت کلی بغیر اسکے کہ کہہ سکتی ہے کہ خاص قیمت مقدار متغیر تابع کی ارقام
متغیر متبع میں مقرر کیجائی اوسکو بعض اوقات کلی بلا واسطہ کہتے ہیں یا بالذات

(۳۸۲) اول ہم یہ ثابت کریں گے کہ یہ شرط ضروری ہے،
فرض کر دو کہ مومین لا اور دوسرے خیر بیان و کی لحاظ لائے کہ ملک میں اگر جملہ مومین بلا

قابلیت کلی کی رکھتا ہی تو کلی لامع موزلا کو اس صورت میں بیان کر سکتی ہیں

$$\left[\begin{array}{l} \text{مجموع} \left[\frac{1}{\text{موزلا}} \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \dots \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \right] \\ - \text{مجموع} \left[\frac{1}{\text{موزلا}} \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \dots \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \right] \end{array} \right]$$

اس میں صورت جملہ کی جو صحیح سی تعبیر ہوتی ہے اور میں خواہ کی قیمت ارقام لامین کچھ ہی ہو تب
ہنیں واقع ہوتا اب فرض کرو کہ اوس کی قیمتوں اور اوس کی سرخرچہ کی حدود غائی پر تبدیل
ہنیں ہوتا تو لامع موزلا سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ
فر لامع موزلا =

میں مجموعہ ۳۴ کے

$$\left[\frac{1}{\text{موزلا}} - \frac{1}{\text{موزلا}} \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) + \frac{1}{\text{موزلا}} \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) - \dots \right] \text{موزلا} =$$

فر خواہ کچھ ہی یہ صحیح نہیں ہو سکتا جہاں تک کہ

$$\frac{1}{\text{موزلا}} - \frac{1}{\text{موزلا}} \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) + \frac{1}{\text{موزلا}} \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) - \dots =$$

اور اگر یہ ارر ذی تطابق صحیح نہ ہو تو اسی جملہ لا متحقق نہیں ہوتا پس اگر تو بلا واسطہ

کلی کی قابلیت رکھتا ہے تو ضروری کہ ارتباط $=$ ارر ذی تطابق صحیح ہو

دوم اب ہم عکس ثابت کرتی ہیں یعنی کہ اگر یہ شرط مستحکم ہو تو مومین قابلیت کلی بلا واسطہ

ہوگی اگر اس قدر کہنا کافی سمجھا گیا ہے کہ اگر یہ شرط مستحکم ہو تو تعبیر لامع موزلا موقوف

نقطہ لا اور کی حد بنانی والی قیمتوں پر موقوف ہوگا اور کی سرخرچہ ان اور سبیل سلی لامع موزلا

خود موقوف نقطہ اون حد بنانی والی قیمتوں پر ہوگا یعنی قابلیت کلی بلا واسطہ رکھتا ہی

اب اس دعویٰ کا اثبات قابل اطمینان کے دوبارہ پیدا کرتے ہیں فرض کرو کہ

$$\text{موزلا} = \text{موزلا} \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \dots \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right) \left(\frac{1}{\text{موزلا}} \right)$$

فرض کرو کہ موزلا موزلا کے بافضل غیر لامع ہیں اور یہ الیسی مقدار ہی کہ بلا واسطہ

لا کے متغیر ہوتی ہے اور مومین کی جگہ کو + موزلا اور کی جگہ کو + موزلا اور کی جگہ

لوگوں سے لوگوں اور علیٰ ذہن القیاس رکھنی سہی جو مو کی صورت پیدا ہوتی ہی اس کو جمع (سہ) ہے
تغیر کرو پس

جمع (سہ) = جمع (لا و لو + سہ مو و لو + سہ مو و لو + سہ مو و ...)

طرفین کی سرحد ہی بلحاظ سہ کے لی اس نتیجہ سہ حاصل ہوگا۔ کیونکہ اس طرح تغیر کرتے ہیں کہ

$$\text{جمع (سہ)} = \frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \dots$$

طرفین کی کلی سہ = سہ سے سہ = اتک لو تو

$$\text{جمع (۱) - جمع (۰) = جمع (۱) = \left[\frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \dots \right] \text{ ر سہ}$$

یعنی یہ ارزوی انطابق صحیح ہی کہ

جمع (لا و لو + لو و لو + مو و لو + مو و ...)

= جمع (لا و لو و لو و لو و ...)

$$+ \text{جمع (۱) =} \left[\frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \dots \right] \text{ ر سہ}$$

طرفین کی کلی بلحاظ لا کے لو تو

جمع (لا و لو + مو و لو + مو و لو + مو و ...)

= جمع (لا و لو و لو و لو و ...)

$$+ \text{جمع (۱) =} \left[\frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \dots \right] \text{ ر لا}$$

اس میں آخر رقم کے اندر ترتیب کلی بلحاظ سہ کی بدل گئی ہے

اور کلی بالا جزا سے

$$\text{جمع (۱) - جمع (۰) = جمع (۱) = \left[\frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \dots \right] \text{ ر لا}$$

$$\text{جمع (۱) - جمع (۰) = جمع (۱) = \left[\frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \frac{\text{جمع}}{\text{رہو}} \text{ مو} + \dots \right] \text{ ر لا اور علی القیاس}$$

پس جمع (لا و لو + مو و لو + مو و لو + مو و ...)

= جمع (لا و لو و لو و لو و ...)

مثلاً موقابلت کلی بلا واسطہ متین دفعہ کہی اسکی لمی ضرور ہی کہ سوا شرائط (۱) اور (۲) یا (۱) اور (۳) کے یہ مطالعہ صحیح ہوں کہ

$$\frac{زمو لا}{ر} - \frac{زمو لا}{ر} + \frac{زمو لا}{ر} - \frac{زمو لا}{ر} = ۰ \quad (۴)$$

ہم (۴) کی صورت کی ترمیم کر سکتے ہیں اس واسطے

$$\frac{زمو لا}{ر} - \frac{زمو لا}{ر} = \frac{لا}{ر} + \frac{لا}{ر} + \frac{لا}{ر}$$

$$\frac{زمو لا}{ر} - \frac{زمو لا}{ر} = \frac{لا}{ر} + \frac{لا}{ر} + \frac{لا}{ر}$$

$$\frac{زمو لا}{ر} - \frac{زمو لا}{ر} = \frac{لا}{ر} + \frac{لا}{ر} + \frac{لا}{ر}$$

(۴) میں انکو درج کرو اور اذن ارقام کو بموجب (۱) کے برابر صفر کے ہیں خارج کر دو یہ حاصل ہو گا کہ

$$\frac{زمو لا}{ر} - \frac{زمو لا}{ر} + \frac{زمو لا}{ر} - \frac{زمو لا}{ر} = ۰ \quad (۵)$$

پس (۵) کو قائم مقام (۴) کا (۱) اور (۲) یا (۱) اور (۳) کے اقتران میں کر سکتی ہیں

حد و غای کی قابلیت تغیر پر زیاد

(۳۸۴) حد و غای کے تغیرات کے جو سوالات کہی ہیں ہم نے او کی ترکیب کے بیان

کرنے میں تعلیقہ شراج اور حلیٹ کی کی ہی ان دو نو صاحبوں کی کتاب میں نہایت عمدہ

ہیں اور جتنی ترکیبیں اور مین اور سب میں یہ ترکیب نہایت عمدہ ہی ہم مقدار متبوع

میں کچھ تغیر نہیں کرتے بلکہ صرف مقدار تابع میں کرتے ہیں لیکن اکثر اور ترکیب اختیار

کرتے ہیں اسکو ہی بیان کرتے ہیں تاکہ طالب علم جہاں کہیں اس کے مطالعہ میں

اس مضمون کا اشارہ آجای سمجھ جائی فرض کر دو کہ لابل گلا + فلا اور بدل کر

و + فرو ہو جائی فلا اور فرو نہایت ہی چھوٹی اختیاری جملے لاکے ہیں مطلوب یہ ہے کہ

تغیرات $\frac{لا}{ر}$ اور $\frac{زمو لا}{ر}$ کی دریافت کرو

زمو لا میں جو تغیر ہو اسکو فرو $\frac{لا}{ر}$ سے تغیر کر دیں

$$\frac{r}{z} - \frac{(r + r' + r'')}{(z + z' + z'')} = \frac{r}{z}$$

$$\frac{r}{z} - \frac{\frac{r}{z} + \frac{r'}{z'} + \frac{r''}{z''}}{\frac{z}{z} + \frac{z'}{z'} + \frac{z''}{z''}} =$$

$$= \frac{r}{z} - \frac{r}{z} - \frac{r'}{z'} - \frac{r''}{z''} + \frac{r}{z} =$$

دوسری مرتبہ کی مفادیر کو خارج سمجھو

پس علم حساب الجبریات کے طریقہ کتابت اختیار کرنی سی ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{r}{z} - \frac{r'}{z'} = \frac{r''}{z''}$$

$$= \frac{(r - r' - r'')}{(z - z' - z'')} =$$

$$\frac{r - r' - r''}{z - z' - z''} = \frac{r}{z}$$

اس نتیجہ میں اکوڑ سے بلو تو

$$\frac{r - r' - r''}{z - z' - z''} = \frac{r}{z}$$

$$= \frac{r(z - z' - z'')}{z(z - z' - z'')} =$$

$$\frac{r(z - z' - z'')}{z(z - z' - z'')} = \frac{r}{z}$$

اور علیٰ ہذا القیاس

فرء - فرء' - فرء'' = فرء

$$\frac{r}{z} + \frac{r'}{z'} = \frac{r''}{z''}$$

$$\frac{r}{z} + \frac{r'}{z'} = \frac{r''}{z''}$$

$$\frac{r}{z} + \frac{r'}{z'} = \frac{r''}{z''}$$

اب فرض کرو کہ مونوئی حذلا اور توکا اور سرخریان کی لمبا طلا کے ہوت اور لو = لریع ہوتا

لا اور زمین جو تغیرات فرلا اور فرز ہوتی ہیں ان سے چلو میں تغیر پیدا ہوتا ہے اور کو بیان کرنا

مطلوبہ فرض کرو کہ فرمواوس تبدیل کو تغیر کرتا ہے کہ موہین جو تبدیل ہو وہ فرموی تغیر

ہونا ہی تو

$$\text{فرلو} = \text{لابع} (\text{مو} + \text{فرم}) \frac{(\text{لا} + \text{فرلا})}{\text{زلا}} \text{زلا لابع فرموزلا}$$

$$= \text{لابع مو} \frac{\text{رفلا}}{\text{زلا}} + \text{لابع فرموزلا}$$

دوسری مرتبہ کی رقم کو خارج کر دو

$$\text{اب مع مو} \frac{\text{رفلا}}{\text{زلا}} = \text{مو فرلا} - \text{مع} \left[\frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \right] \text{فرلا زلا}$$

$$\text{اسو اسطے لابع مو} \frac{\text{رفلا}}{\text{زلا}} = (\text{مو فرلا}) - (\text{مو فرلا}) \text{لابع} \left[\frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \right] \text{فرلا زلا}$$

اس میں مو کی سرخزوی کامل کو جو بلحاظ لا کی بجائی $\left[\frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \right]$ تعبیر کرتا ہے

$$\text{بس فرلو} = (\text{مو فرلا}) - (\text{مو فرلا}) - \text{لابع فرمو} - \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرلا زلا}$$

$$\text{اور فرمو} = \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرلا} + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرز} + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرز} + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرز} + \dots$$

$$\left[\frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \right] = \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} + \dots$$

$$\text{بس فرمو} - \left[\frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \right] \text{فرلا} = \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرلا} + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرلا} + \dots$$

اور آخر کو

$$\text{فرلو} = (\text{مو زلا}) - (\text{مو فرلا}) + \text{لابع} \left(\frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرلا} + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{فرلا} + \dots \right) \text{زلا}$$

اب کچھ ضرورت آئی عمل کرنی کی ہمیں کیونکہ ہم کو نتیجہ وہ حاصل ہو گیا جو مساوی ۳۵۸ دفعہ

کا ہے وہاں فرمے بیان او سکی جگہ لابی اور فرلا اور فرلا بجائی زلا اور رلا کے مین

علم سندس مین جہاں استعمال ہو وہاں یہ دیکھنا چاہی کہ لا اور تغیر سی لا + فرلا اور + فرلا

ہو جائیگی بس لا + فرلا متناظر لا + زلا دفعہ ۳۵۹ کی ہوگا

$$\text{اور لا} + \text{فرم متناظر} (5 + \frac{\text{رمو}}{\text{زلا}} \text{رلا}) \text{دفعہ ۳۵۹ کی ہوگا}$$

(۳۵۸) برقیہ سرلیٹ کی کتاب مین اسکا بیان بہت لطیف و تفصیل سی لکھا ہوا ہے

نہایت عجیب مثالین اس سلسلہ کی علم طبعیات مین واقع ہوتی ہر جیسی کہ سوال قلیل

وغیرہ کا ہی ہم ذیل مین اسی قبیل کی دیکھنا چاہتے ہیں

محور شکل پر ہے، وقت قلیل جہونی کا نہایت ہی کم ہے پس صورت مجسم کی دریافت کرو۔
(۱۶) ایک برتن کا ساوا معلوم ہے اور اس کی صورت سطح مستدیر سی پیدا ہوتی ہے اور اس کی
مدور میں اور اس میں بے ایک نالغ ہر گیلی ہے اور اس پر کشش کا اثر نہیں فرض کیا گیا ہے تو صورت
طرف کی ایسی تحقیق کرو کہ کل دابہ اس پر اثر کرے کہ کم از کم ہو اور مقدار مدور مدور کی
معلوم ہے حاصل خط منحنی طرف کا پیدا کرنا لا محالہ ہے

(۱۷) حساب تغیرات سی ساوات تراش تقاطع ایک خط مستقیم اور نہر کی اوس حالت میں
دریافت کرو کہ تین مقادیر سطح اور طرف اور عمود الماس میں عمود الماس علم ابی داب کا
جو حد غائی زیادتی کی کہی یا حد غائی کمی کی اور باقی در وہ معلوم ہوں اور کثافت کی سطحین
اور داب حساب میں نہیں لگاتے

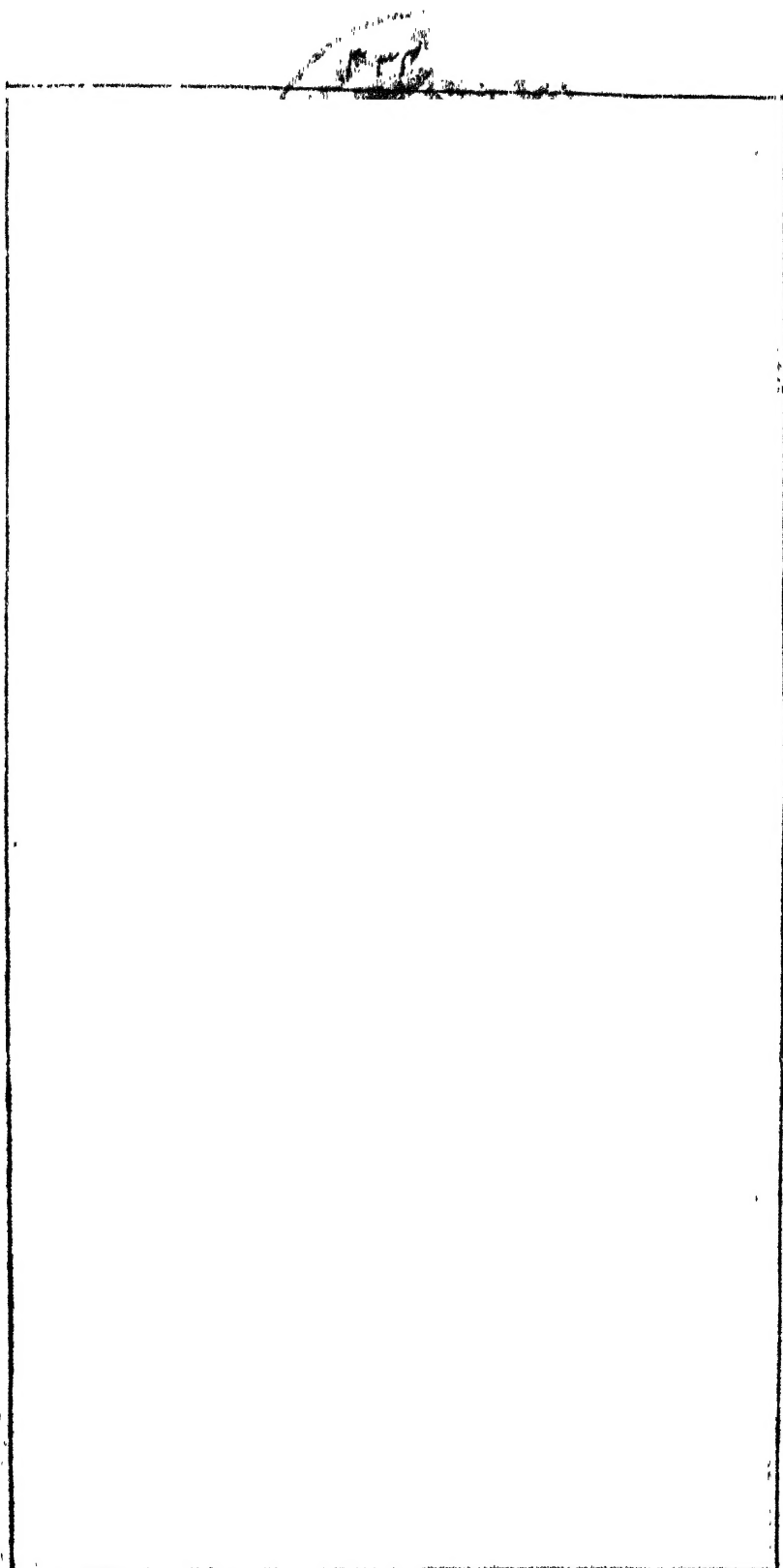
یہہ ہی ثابت کرو کہ جس سطح مستدیر پر حد غائی کمی کی کہی اور صرف طرف معلوم تو تراش مدور
ہوگی اور جب عمود الماس داب کا حد غائی کمی کی کہی تو تراش محبل ہوگی اگر سطح مستدیر
معلوم ہو اور وہ خط مستقیم ہوگی اگر طرف معلوم ہو

(۱۸) اگر دو خطوط منحنی ہوں اور انکی حدود کا رخ ایک ہی جانب میں ہو اور ایک ہی اطراف پر
ختم ہوتی ہوں تو ایک درہ جو صرف کش متصل کے سبب سے متحرک ہو وہ اوپر کے خط منحنی
کو زیادہ عرصہ میں نسبت نیچے کے خط منحنی کے طے کرے گا اور ابتدائی رفتار دو خطوط منحنی
پر یکساں فرض کی گئی ہے

(۱۹) فرض کرو کہ ایک جہاز کی رفتار مستدیر پہلنے کی ایک جہاز اور اس کا یہی جو سمت جہاز
کے ہوا کی سمت کے ساتھ بناتی ہی تو ثابت کرو کہ قلیل الزمان راہ دو معلوم مقامات
کے درمیان قائم الزام ہے اور اگر راہ اس کی خط مستقیم نہ ہو جو اون دو مقاموں کے درمیان
ملا یا جاوے تو وہ ہمیشہ دو سمتوں میں ہوگی جو ایک ہی زاویہ ہوا کی سمت کے ساتھ بتاتے ہیں۔
(۲۰) مجسم مستدیر جس سطح مستدیر معلوم ہی نہایت بڑی جہامت کا دریافت کرو اور یہ سطح

مستدیر محور گردش کو دو نقاط معین قطع کرتی اور یہ فرض کر لیا ہے کہ سطح مستدیر معلوم
برابر اس کرہ کے سطح مستدیر کے ہنہیں ہی کہ جب کا وہ قطر ہو دو نقاط معین میں بلایا جاوے

تمام شد



فہرست مضامین علم حساب الکلیات

نمبر باب	مضمون	صفحہ
۱	کلی لینے کے معنی اور مثالین	۱
۲	کسور ناظمہ	۲۱
۳	استحالیہ کے صورت قانونیہ	۳۸
۴	مشرقیات	۴۵
۵	کلی نشاء	۴۵
۶	خطوط منحنی کے طول	۷۴
۷	خطوط منحنی مستوی اور سطح بیرونی کے رقبے	۱۰۴
۸	حجم محسبات کے	۱۴۶
۹	کلیاتی جزئی بحالہ و منشی کے جوادس کلیاتی و منشی	۱۷۰
۱۰	برضوی کلیات	۱۷۹
۱۱	اضعاف کلی میں تغیر مقدار بر منغیر کا	
۱۲	کلیات محدود	۲۱۵
۱۳	علم منشی جملوں کا پہلا تا	۲۵۵
۱۴	اوسط قیمت اور حلالہ میں علم حساب الکلیات کا استعمال	۲۷۷
۱۵	حساب تغیرات	۲۸۳

